Ciągła zależność rozwiązań od warunków poczatkowych
Lemat Gronwalla Niech $v : [a, b)- > [0, \infty)$ będzie funkcją ciągłą. Jeżeli

$$v(t) \leqslant c + K \int_a^t v(s)ds \quad \text{dla} \quad t \in [a, b),$$

gdzie $c \geqslant 0$ i $K \geqslant 0$.
Wówczas

$$v(t) \leqslant ce^{K(t-a)}.$$

Dowód. Najpierw dowód przeprowadzimy dla $c > 0$. Niech $u(t)$ będzie funkcją określona zależnością:

$$u(t) = c + K \int_a^t v(s)ds.$$

Po zróżniczkowaniu powyższej równości i wykorzystaniu założeń twierdzenia otrzymamy

(1). $$u'(t) = Kv(t) \leqslant Ku(t)$$

Ponieważ $u(t) \geqslant c > 0$ dla $t \in [a, b)$ więc z (1) otrzymamy nierówność

(2) $$\frac{u'(t)}{u(t)} \leqslant K.$$

Całkujemy teraz w przedziale $[a, t)$ nierówność (2) otrzymamy

$$\ln u(t) - \ln u(a) \leqslant K(t - a).$$

Stąd

$$u(t) \leqslant u(a)e^{K(t-a)},$$

uwzgledniając, że $u(t) \geqslant v(t)$ i fakt, że $u(a) = c$ dostaniemy

(3) $$v(t) \leqslant ce^{K(t-a)}$$

co kończy dowód twierdzenia w przypadku $c > 0$.
Jeżeli $c = 0$ to przechodząc z c w nierówności (3) do zera otrzymamy

$$v(t) \leqslant 0.$$

Stąd ponieważ $v(t) \geqslant 0$ mamy, że $v(t) \equiv 0$.

Bazując na tym Lemacie pokażemy ciągłą zależność rozwiązań problemów początkowych dla równań i układów równań rzędu pierwszego od warunków poczatkowych.
Niech $\| \cdot \|$ oznacza normę w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Niech

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \quad |t - t_0| \leqslant a, \quad \| x - x_0 \| \leqslant b\}$$

i

$$f = (f_1, \dots, f_n)$$

bedzie funkcją ciągłą i spełniającą warunek Lipschitza ze wzgledu na x:

$$\| f(t, x) - f(t, \tilde{x}) \| \leqslant L \| x - \tilde{x} \| .$$

Niech

$$M = \max \{\| f(t, x) \|: \quad (t, x) \in D.\}$$

Niech funkcja $x(t)$ będzie rozwiązaniem problemu począkowego

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \tag{4}$$

a funkcja $\tilde{x}'(t)$ będzie rozwiązaniem problemu począkowego

$$\tilde{x}'(t) = f(t, \tilde{x}(t)), \quad x(t_1) = x_1 \tag{5}$$

gdzie $(t_1, x_1) \in D$ ponadto załóżmy, że $t_0 \leqslant t_1$ i rozwiązania problemów (4) i (5) są określone na przedziale $[t_0, t_0 + h)$. Z (4) i (5) mamy, że

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds,$$

$$\tilde{x}(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(s, \tilde{x}(s)) ds.$$

Stąd

$$\| x(t) - \tilde{x}(t) \| = \| x_0 - x_1 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s)) ds + \int_{t_1}^{t} \Big(f(s, x(s)) - f(s, \tilde{x}(s)) \Big) ds \|$$

$$\leqslant \| x_0 - x_1 \| + M |t_1 - t_0| + L \int_{t_1}^{t} \| x(s) - \tilde{x}(s) \| ds.$$

Z powyższej nierówności i Lematu Gronwalla otrzymamy

$$\| x(t) - \tilde{x}(t) \| \leqslant \Big(\| x_0 - x_1 \| + M |t_1 - t_0| \Big) e^{Lh}.$$

Stąd wynika ciągła zależność rozwiązań od warunków poczatkowych ponieważ dla dowolnego $\varepsilon > 0$, $\exists \, \delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ takie, że jeżeli $\| x_0 - x_1 \| \leqslant \delta_1$ i $|t_1 - t_0| \leqslant \delta_2$ to $\| x(t) - \tilde{x}(t) \| \leqslant \varepsilon$.