Czynnik całkujący

Niech

$$M(t,\,x)dt + N(t,\,x)dx = 0 \tag{1}$$

będzie równaniem różniczkowym pierwszego rzedu w postaci różniczkowej. Zakładamy, że funkcje $M(t,\,x)$ i $N(t,\,x)$ są ciągłe i mają pochodne ciągłe. Mówimy, że równanie (1) jest zupełne, jeżeli istnieje funkcja $U(t,\,x)$ taka, że

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t}\,dt + \frac{\partial U}{\partial x}\,dx = M\,dt + N\,dx = 0 \tag{2}$$

Warunkiem koniecznnym i wystarczającym aby równanie (1) było zupełne jest zachodzenie nastepującej równości

$$\frac{\partial M}{\partial x}(t,\,x) = \frac{\partial N}{\partial t}(t,\,x). \tag{3}$$

Jeżeli równanie (1) nie jest zupełne ale istnieje funkcja $\mu(t,\,x)$ taka, że równanie

$$\mu(t,\,x)\,M(t,\,x)dt + \mu(t,\,x)\,N(t,\,x)dx = 0 \tag{4}$$

jest zupełne to funkcję $\mu(t,\,x)$ nazywamy czynnikiem całkującym.
Zauważmy, że jeżeli funkcja $x(t)$ jest rozwiązaniem równania (1) to jest też rozwiązaniem równania (4) zależność odwrotna również zachodzi.
Będziemy szukać czynnika całkującego w postaci $\mu(\alpha(t,\,x))$ gdzie $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $\alpha : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Równanie (4) ma wtedy postać:

$$\mu(\alpha(t,\,x))\,M(t,\,x)dt + \mu(\alpha(t,\,x))\,N(t,\,x)dx = 0. \tag{5}$$

Wprowadzamy następujące oznaczenie:

$$D(t,\,x) = \frac{\partial N}{\partial t}(t,\,x) - \frac{\partial M}{\partial x}(t,\,x).$$

Równanie (5) jest zupełne jeżeli

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu(\alpha(t,\,x))M(t,\,x)) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu(\alpha(t,\,x)N(t,x)).$$

Po zróżniczkowaniu dostajemy

$$\mu'\,\frac{\partial \alpha}{\partial x}\,M + \mu\,\frac{\partial M}{\partial x} = \mu'\,\frac{\partial \alpha}{\partial t}\,N + \mu\,\frac{\partial N}{\partial t}.$$

Stąd po przekształceniach dostajemy

$$\mu' \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} M - \frac{\partial \alpha}{\partial t} N \right) = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x} \right) = \mu\, D.$$

Zatem

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{D}{\frac{\partial \alpha}{\partial x} M - \frac{\partial \alpha}{\partial t} N}. \tag{6}$$

Jeżeli prawa strona powyższej równości zależy tylko od α

$$\frac{D}{\frac{\partial \alpha}{\partial x} M - \frac{\partial \alpha}{\partial t} N} = F(\alpha)$$

to możemy równość (6) scałkować po α i otrzymamy

$$\ln \mu = \int F(\alpha)\, d\alpha,$$

stąd mamy

$$\mu(\alpha) = \exp(\int F(\alpha)\, d\alpha).$$

Rozpatrzmy teraz kilka przykładów funkcji $\alpha = \alpha(t, x)$.

1. $\alpha = t$ wtedy

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}}{-N} = F(t)$$

$$\mu(t) = \exp(\int \frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}}{-N}\, dt).$$

2. $\alpha = x$ wtedy

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = F(x)$$

$$\mu(x) = \exp(\int \frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}}{M}\, dx).$$

3. $\alpha = t + x$ wtedy

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}}{M - N} = F(\alpha)$$

$$\mu(\alpha) = \exp(\int \frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}}{M - N}\, d\alpha).$$

4. $\alpha = tx$ wtedy

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = x, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x} = t$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}}{tM - xN} = F(\alpha)$$

$$\mu(\alpha) = \exp(\int \frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}}{tM - xN}\, d\alpha).$$

Przykład Rozwiązać równanie

$$\left(\frac{5}{x} + 4\right) dt + \left(\frac{2t}{x} - \frac{8x^2}{t}\right) dx = 0. \tag{7}$$

W naszym przypadku

$$M = \frac{5}{x} + 4, \qquad N = \frac{2t}{x} - \frac{8x^2}{t}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{2}{x} + \frac{8x^2}{t^2}, \qquad \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{5}{x^2}.$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}}{tM - xN} = \frac{1}{tx} = \frac{1}{\alpha} = F(\alpha)$$

$$\mu(\alpha) = \exp(\int \frac{1}{\alpha}\, d\alpha) = \exp(\ln \alpha) = \alpha = tx.$$

Mnożymy równanie (7) przez tx i otrzymujemy

$$(5t + 4tx)dt + (2t^2 - 8x^3)dx = 0. \tag{8}$$

Ponieważ

$$\frac{\partial}{\partial x}(5t + 4tx) = 4t, \qquad \frac{\partial}{\partial t}(2t^2 - 8x^3) = 4t$$

więc równanie (8) jest zupełne. Wyznaczamy funkcję $U(t\, x)$.

Ponieważ
$$\frac{\partial U}{\partial t} = 5t + 4tx,$$
więc
$$U(t,\,x) = \int (5t + 4tx)dt = \frac{5}{2}t^2 + 2t^2x + C(x).$$
Teraz różniczkujemy powyższą równość ze względu na x:
$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2t^2 + C'(x).$$
Ponieważ
$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2t^2 - 8x^3,$$
więc otrzymujemy zależność
$$2t^2 + C'(x) = 2t^2 - 8x^3.$$
Stąd
$$C'(x) = -8x^3, \quad C(x) = -2x^4$$
i
$$U(t,\,x) = \frac{5}{2}t^2 + 2t^2x - 2x^4.$$
Rozwiązanie równania (8) które jest równocześnie rozwiązaniem równania (7) określone jest zależnością:
$$\frac{5}{2}t^2 + 2t^2x - 2x^4 = C.$$