Macierze symetryczne

J.Janus, M.Luśtyk

Macierze symetryczne.

Ponieważ macierze symetryczne bardzo często pojawiają sie w zastosowaniach więc poświęcimy im trochę uwagi.
Macierz kwadratową A nazywamy **symetryczną**, jeżeli jest równa swojej macierzy transponowanej, tj. zachodzi warunek $A = A^T$.

Twierdzenie 5.
Niech A będzie macierzą rzeczywistą symetryczna i niech λ będzie wartością własną. Wtedy λ jest liczbą rzeczywistą. Jeżeli Z jest zespolonym wektorem własnym odpowiadającącym wartości własnej λ, i $Z = X + iY$ gdzie $X, Y \in \mathbb{R}^n$ to X i Y są rzeczywistymi wektorami własnymi odpowiadającymi wartości własnej λ.
Dowód. Z warunków twierdzenia mamy

$$A \cdot Z = \lambda \cdot Z. \tag{22}$$

Wyrażenie $\bar{Z}^T \cdot A \cdot Z$ jest macierzą 1×1, macierz transponowana takiej macierzy jest tą samą macierzą. Z (22) mamy

$$\bar{Z}^T \cdot A \cdot Z = \bar{Z}^T \cdot \lambda \cdot Z = \lambda \cdot \bar{Z}^T \cdot Z \tag{23}$$

$$\bar{Z}^T \cdot A \cdot Z = (\bar{Z}^T \cdot A \cdot Z)^T = Z^T \cdot A^T \cdot \bar{Z} = Z^T \cdot A \cdot \bar{Z}. \tag{24}$$

Ponieważ macierz A rzeczywista więc $\bar{A} = A$ i

$$\overline{A \cdot Z} = \bar{A} \cdot \bar{Z} = A \cdot \bar{Z}$$

i

$$\overline{A \cdot Z} = \overline{\lambda \cdot Z} = \bar{\lambda} \cdot \bar{Z}$$

zatem

$$A \cdot \bar{Z} = \bar{\lambda} \cdot \bar{Z}.$$

Stąd i (24) mamy

$$\bar{Z}^T \cdot A \cdot Z = Z^T \cdot A \cdot \bar{Z} = Z^T \cdot \bar{\lambda} \cdot \bar{Z} = \bar{\lambda} \cdot Z^T \cdot \bar{Z}. \tag{25}$$

Zauważmy, że

$$Z^T \cdot \bar{Z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \cdot \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \bar{Z}^T \cdot Z \neq 0.$$

Zatem z (23) i (25) mamy, że $\lambda = \bar{\lambda}$ czyli λ jest liczbą rzeczywistą. Z (22) mamy

$$A \cdot Z = A \cdot (X + iY) = \lambda \cdot (X + iY) = \lambda \cdot X + i\lambda \cdot Y.$$

Ponieważ λ jest rzeczywistą liczbą więc

$$A \cdot X = \lambda \cdot X, \quad A \cdot Y = \lambda \cdot Y.$$

Zatem X i Y są rzeczywistymi wektorami własnymi odpowiadającymi wartości własnej λ.

Twierdzenie 6. Wektory własne macierzy symetrycznej odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne.
Dowód. Niech A będzie macierzą symetryczną i λ, μ różnymi wartościami własnymi a X, Y odpowiadającymi im wektorami własnymi:

$$A \cdot X = \lambda \cdot X, \quad A \cdot Y = \mu \cdot Y. \tag{26}$$

Z (26) mamy

$$X^T \cdot A \cdot Y = X^T \cdot \mu \cdot Y = \mu \cdot X^T \cdot Y \tag{27}$$

Ponieważ wyrażenie $X^T \cdot A \cdot Y$ jest macierzą 1×1, więc macierz transponowana jest tą samą macierzą. Stąd i (26) mamy

$$X^T \cdot A \cdot Y = (X^T \cdot A \cdot Y)^T = Y^T \cdot A \cdot X = Y^T \cdot \lambda \cdot X = \lambda \cdot Y^T \cdot X. \tag{28}$$

Ponieważ

$$< X, Y >= X^T \cdot Y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Y^T \cdot X.$$

Stąd uwzgledniając (27) i (28) mamy zależności

$$\mu \cdot X^T \cdot Y = \lambda \cdot Y^T \cdot X \iff (\mu - \lambda) \cdot < X, Y >= 0.$$

Ponieważ $\lambda \neq \mu$ więc $< X, Y >= 0$ czyli wektory własne są ortogonalne.

Ortogonalne macierze.

Macierz kwadratowa A jest ortogonalna jeżeli

$$A^{-1} = A^T.$$

Wektory u, v są **ortonormalne** jezeli są ortogonalne $< u, v >= 0$ i mają długość $\|u\| = \|v\| = 1$.

Twierdzenie 7. Następujące warunki są równoważne dla macierzy A wymiaru $n \times n$:

1. Macierz A jest ortogonalna
2. Macierz A^T jest ortogonalna
3. Wektory utworzone z wierszy macierzy A są ortonormalne w $\mathbb{R}^n$
4. Wektory utworzone z kolumn macierzy A są ortonormalne w $\mathbb{R}^n$.

Twierdzenie 8.

1. Macierz odwrotna do macierzy ortogonalnej jest macierza ortogonalną
2. Iloczyn macierzy ortogonalnych jest macierzą otrogonalną
3. Jeżeli A jest ortogonalna to $\det(A) = 1$ lub $\det(A) = -1$.

Twierdzenie 9. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Jeżeli P jest macierzą przejścia z jednej bazy ortonormalnej w V do drugiej bazy ortonormalnej w V to P jest macierzą ortogonalną.

Ortogonalna diagonalizacja.

Definicja . Mówimy, że macierze A i B są ortogonalnie podobne jezeli istnieje orogonalna macierz P taka, że

$$P^T AP = B.$$

Jeżeli macierz A jest ortogonalnie podobna do macierzy diagonalnej D:

$$P^T AP = D$$

wtedy mówimy, że jest ortogonalnie diagonalizowana.

Określimy sobie warunki jakie musi spełniać macierz A by była ortogonalnie diagonalizowana. Najpierw pokazemy, że nie można ortogonalnie diagonalizować macierzy która nie jest symetryczna.
Przypuśćmy, że

$$P^T AP = D \tag{29}$$

gdzie D macierz diagonalna. Mnożymy równanie (29) z lewej strony przez macierz P a z prawej strony przez P^T i uwzgledniając zależność $PP^T = I$ otrzymamy

$$A = PDP^T. \tag{30}$$

Z (30) uwzględniając $D^T = D$ dokonując transpozycji otrzymamy

$$A^T = (PDP^T)^T = PD^T P^T = PDP^T.$$

Stąd i (30) mamy $A = A^T$, czyli macierz A musi być symetryczna.

Twierdzenie 7. Następujące warunki są równoważne dla macierzy A wymiaru $n \times n$:

1. Macierz A jest ortogonalnlnie diagonalizowana
2. Dla macierzy A istnieje n ortonormalnych wektorów własnych
3. Macierz A jest symetryczna

4. Dla każdej wartości własnej, wymiar odpowiadającej jej podprzestrzeni własnej jest równy jej krotności.

Algorytm ortogonalnej diagonalizacji.

1. Wyznaczamy wartości własne macierzy A
2. Dla każdej podprzestrzeni własnej wyznaczamy bazę ortonormalną, w przypadku gdy wymiar jest większy niż jeden stosujemy ortogonalizację Grama-Schmita.
3. Definiujemy macierz P której kolumnami są wektory skonstruowane w punkcie 2. Tak określona macierz P ortogonalnie diagonalizuje macierz A i wartości własne na przekątnej macierzy $D = P^T AP$ są w takiej samej kolejności jak odpowiadające im wektory własne w P.

Przykład 17. Macierz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

ortogonalnie zdaigonalizować.
Wyznaczamy wartości własne macierzy A

$$|A - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)\cdot(2-\lambda)^2 = 0.$$

Zatem $\lambda_1 = 8$- jednokrotna wartość własna i $\lambda_2 = 2$- dwukrotna wartość własna. Wyznaczymy teraz podprzestrzenie własne :

1. Dla $\lambda_1 = 8$

$$V_1 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \ (A - 8I)\cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stąd wynika, że $x_1 = x_2 = x_3$, zatem

$$V_1 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_1, \quad x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Przestrzeń V_1 jest generowana przez wektor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ortonormalizujemy ten wektor czyli dzielimy przez długość $\|v_1\| = \sqrt{3}$ więc

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

2. Dla $\lambda_1 = 2$

$$V_2 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \ (A - 2I) \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stąd wynika, że $x_3 = -x_1 - x_2$ a x_1, x_2 mogą być dowolne, zatem

$$V_2 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot x_2, \quad x_1,\, x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Przestrzeń V_2 jest generowana przez wektory $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Przeprowadziemy teraz ortogonalizacje Grama-Schmita dla wektorów v_2, v_3:

$$w_2 = v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$w_3 = v_3 - \frac{< v_3, w_2 >}{< w_2, w_2 >} \cdot w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Teraz przeprowadzimy normalizację wektorów w_2 i w_3:

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Definiujemy macierz P:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Macierz D ma postać

$$D \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

i spełniona jest zależność $P^T AP = D$.