Algorytm Putzera wyznaczania macierzy fundamentalnej.

Twierdzenie
Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ będą wartościami własnymi macierz A. Wówczas macierz fundamentalna równania:

$$x'(t) = Ax(t) \tag{1}$$

ma postać

$$X(t) = \sum_{i=0}^{n-1} v_{i+1}(t)P_i, \quad t \in \mathbb{R}$$

gdzie

$$P_i = \prod_{k=1}^{i}(A - \lambda_k I) \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, n-1, \;\; P_0 = I$$

a funkcje $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ określone są następującą zaleznością rekurencyjną:

$$v_1'(t) = \lambda_1 v_1(t), \quad v_1(0) = 1 \tag{2}$$

$$v_{i+1}'(t) = \lambda_{i+1} v_{i+1}(t) + v_i(t), \quad v_{i+1}(0) = 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Dowód. Wystarczy pokazać, że

$$X'(t) = AX(t), \quad X(0) = I.$$

Z pierwszej zalezności wynika, że funkcje

$$x_i(t) = \begin{pmatrix} x_{1i}(t) \\ \vdots \\ x_{ni}(t) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n$$

są rozwiązaaniami równania

$$x_i'(t) = Ax_i(t)$$

a z drugiej wynika, że

$$\det X(0) = \det I = 1 \neq 0.$$

Zatem funkcje $x_1, \ldots, x_n(t)$ stanowią układ fundamentalny rozwiązań równania (1). Zauważmy, że

$$P_{i+1} = \prod_{k=1}^{i+1}(A - \lambda_k I) = (A - \lambda_{i+1} I)\prod_{k=1}^{i}(A - \lambda_k I) = (A - \lambda_{i+1} I)P_i.$$

Jeżeli przyjmiemy, że $v_0(t) \equiv 0$ to równania (2) i (3) można zapisać jedną zależnością:

$$v_i'(t) = \lambda_i v_i(t) + v_{i-1}(t), \ i = 1, \dots, n.$$

Korzystając z powyższych wzorów mamy

$$\begin{aligned} X'(t) - \lambda_n X(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} v_{i+1}'(t) P_i - \lambda_n \sum_{i=0}^{n-1} v_{i+1}(t) P_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\lambda_{i+1} v_{i+1}(t) + v_i(t)\right) P_i - \lambda_n \sum_{i=0}^{n-1} v_{i+1}(t) P_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_n) v_{i+1}(t) P_i + \sum_{i=1}^{n-1} v_i(t) P_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} (\lambda_{i+1} - \lambda_n) v_{i+1}(t) P_i + \sum_{i=0}^{n-2} v_{i+1}(t) P_{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} (\lambda_{i+1} - \lambda_n) v_{i+1}(t) P_i + \sum_{i=0}^{n-2} v_{i+1}(t)(A - \lambda_{i+1} I) P_i \\ &= (A - \lambda_n I) \sum_{i=0}^{n-2} v_{i+1}(t) P_{i+1} \\ &= (A - \lambda_n I)(X(t) - v_n(t) P_{n-1}) \\ &= AX(t) - \lambda_n X(t) - v_n(t)(A - \lambda_n I) P_{n-1}. \end{aligned}$$

Z twierdzenia Caleya-Hamiltona

$$(A - \lambda_n T) P_{n-1} = \prod_{k=1}^{n} (A - \lambda_k I) = 0$$

zatem

$$X'(t) = AX(t).$$

Z warunków początkowych na funkcje $v_1(t), \dots, v_n(t)$ wynika, że

$$X(0) = P_0 = I,$$

co kończy dowód.