Rozważmy prawie-liniowe równanie różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego

$$(1) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1,\ldots,x_n)u_{x_ix_j} + F(x_1,\ldots,x_n,u,u_{x_1},\ldots u_{x_n}) = 0,$$

gdzie a_{ij}, $i,j = 1,\ldots,n$ są funkcjami określonymi na zbiorze $U \subset \mathbb{R}^n$, niezerującymi się równocześnie w żadnym punkcie tego zbioru, u jest szukaną funkcją zmiennych $x_1,\ldots,x_n$, a F jest funkcją zadaną. Z równaniem (1) możemy związać formę kwadratową

$$(2) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1,\ldots,x_n)\lambda_i\lambda_j.$$

Z teorii form kwadratowych wiadomo, że dla każdego ustalonego punktu $(x_1,\ldots,x_n) \in U$ istnieje przekształcenie postaci

$$(3) \qquad \mu_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}(x_1,\ldots,x_n)\lambda_k, \qquad i = 1,\ldots,n$$

które formę (3) sprowadza do **postaci kanonicznej**,

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} \widetilde{a}_i(x_1,\ldots,x_n)\mu_i^2,$$

tzn. postaci w której występują tylko kwadraty μ_i. Z twierdzenia Sylwestera-Jacobiego o bezwładności form kwadratowych wynika, że ilość współczynników dodatnich oraz ujemnych nie zależy od sposobu sprowadzenia do postaci kanonicznej. Jest ona niezmiennikiem względem przekształceń nieosobliwych. Oznacza to, że równanie (1) poprzez stosowne przekształcenie możemy sprowadzić do postaci kanonicznej

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{n} \widetilde{a}_i(x_1,\ldots,x_n)v_{x_ix_i} + \widetilde{F}(x_1,\ldots,x_n,v,v_{x_1},\ldots v_{x_n}) = 0.$$

Mówimy, że równanie (1) jest w punkcie $(x_1,\ldots,x_n)$ typu eliptycznego, jeżeli wszystkie współczynniki $\widetilde{a}_i$ w postaci kanonicznej (5) są różne od zera i mają ten sam znak, typu hiperbolicznego jeżeli są różne od zera i występują zarówno współczynniki ujemne jak i dodatnie, typu parabolicznego, jeżeli niektóre współczynniki są równe zeru a odpowiadające im pochodne pierwszego rzędu nie znikają równocześnie. Jeśli ponadto współczynniki różne od zera mają ten sam znak, równanie nazywamy paraboliczno-eliptycznym, jeśli znaki różne, paraboliczno-hiperbolicznym. Jeśli $\Lambda = [\lambda_1,\ldots,\lambda_n]$ oznacza macierz jednowierszową Λ^T macierz transponowaną, a A macierz $n \times n$

wymiarową o wyrazach a_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$ to formę kwadratową (2) możemy zapisać w postaci macierzowej

$$\Lambda \, A \, \Lambda^T.$$

Sprowadzenie formy do postaci kanonicznej odpowiada przekształceniu macierzy A do postaci diagonalnej, tzn. postaci w której poza przekątną występują same zera. Jeśli w macierzy diagonalnej na przekątnej wszystkie wyrazy są różne od zera i mają ten sam znak, równanie różniczkowe (1) jest typu eliptycznego, jeśli są różnych znaków , typu hiperbolicznego, a jeśli niektóre wyrazy są równe zeru, przy czym odpowiadające tym zmiennym pochodne pierwszego rzędu nie znikają -typu parabolicznego. Zapiszmy równanie (1) w postaci $Lu = g$, gdzie L jest operatorem określonym wzorem

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \tag{6}$$

lub

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{7}$$

Jeśli równanie to jest typu eliptycznego (odp. hiperbolicznego, parabolicznego), to operator L nazywamy operatorem typu eliptycznego (odp. hiperbolicznego, parabolicznego).

Przykład 1.

Określić typ równania $u_{xx} + 4u_{yy} + 2u_{zz} + 2u_{xz} + u_x - u_y + 2u = 0$.
Forma kwadratowa związana z tym równaniem ma postać

$$q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 + 4\lambda_2^2 + 2\lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_3.$$

Wprowadzając nowe zmienne $\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_3$, $\mu_2 = 2\lambda_2$, $\mu_3 = \lambda_3$ otrzymamy postać kanoniczną

$$q(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2.$$

Rozpatrywane równanie jest więc typu eliptycznego.

Przykład 2.

Określić typ równania $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2u_{xy} + u_x + 3u_y + u_z = 0$.
Forma kwadratowa związana z tym równaniem ma postać

$$q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_2.$$

Wprowadzając nowe zmienne

$$\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \mu_2 = \lambda_2, \quad \mu_3 = \lambda_3$$

otrzymamy postać kanoniczną

$$q(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \mu_1^2 + \mu_3^2.$$

Rozpatrywane równanie jest zatem typu parabolicznego.
Przykład 3.
Określić typ równania $u_{xx} + 2u_{yy} - u_{zz} + 2u_{xy} + u_y + 4u = 0$.
Forma kwadratowa związana z tym równaniem ma postać

$$q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1^2 + 2\lambda_2^2 - \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_2.$$

Wprowadzając nowe zmienne

$$\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \mu_2 = \lambda_2, \quad \mu_3 = \lambda_3$$

otrzymamy postać kanoniczną

$$q(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2,$$

a więc rozpatrywane równanie jest typu hiperbolicznego.