Równania różniczkowe układy równań

J.Janus, M.Luśtyk

1 Układ normalny równań różniczkowych rzędu pierwszego

1.1 Definicja 1:

Układem normalnym równań różniczkowych rzędu pierwszego nazywamy układ równań postaci (1)

$$
(1) \qquad \begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}
$$

gdzie $x_1, \dots, x_n$ są nieznanymi funkcjami zmiennej niezależnej $t \in I$, a $f_1, \dots, f_n$ są danymi funkcjami określonymi w $I \times U$, gdzie $I = (a, b)$, a i b mogą być nieskończonościami, $U \subset \mathbb{R}^n$.

1.2 Definicja 2:

Przez rozwiązanie układu równań rózniczkowych (1) rozumiemy funkcje różniczkowalne $x_1, \dots, x_n$ spełniające dla każdego $t \in I$ układ równań (1).

1.3 Definicja 3:

Jeżeli $x_1, \dots, x_n$ są rozwiązaniem układu (1) to trajektorią rozwiązania nazywamy zbiór punktów w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ określony następująco:

$$\{(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad t \in I\}.$$

1.4 Definicja 4:

Problem początkowy (Cauchy'ego) dla układu (1) polega na znalezieniu w przedziale I rozwiązania $x_1(t)$, $x_2(t), \dots,$ $x_n(t)$ układu (1) spełniającego warunki początkowe

(2) $$x_1(t_0) = x_{01},\ x_2(t_0) = x_{02}, \dots,\ x_n(t_0) = x_{0n},$$

gdzie $x_{01}, \dots,\ x_{0n}$ są dane, a t_0 jest ustalonym punktem przedziału I .

1.5 Twierdzenie 1. O istnieniu i jednoznaczności

Jeżeli funkcje $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$, dla $i = 1, \dots, n$, są wraz z pochodnymi cząstkowymi $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $(i,\ j = 1, \dots, n)$ ciągłe w $I \times U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ i $(t_0, x_{01}, \dots, x_{0n}) \in I \times U$, to układ równań (1) z warunkami początkowymi (2) posiada dokładnie jedno rozwiązanie w pewnym otoczeniu punktu t_0 .

1.6 Przykład 1:

Pokazać, że układ równań

$$\begin{cases} x_1' = tx_1 + x_2^2 \\ x_2' = x_1 + \sin(x_2) + e^t \end{cases}$$

z warunkiem początkowym $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ posiada w pewnym otoczeniu punktu $t_0 = 0$ dokładnie jedno rozwiązanie. Istotnie, funkcje

$$f_1(t, x_1, x_2) = tx_1 + x_2^2, \quad f_2(t, x_1, x_2) = x_1 + \sin(x_2) + e^t$$

są ciągłe w $\mathbb{R}^3$ ponadto ich pochodne

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = t, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 2x_2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \cos(x_2)$$

są również ciągłe w $\mathbb{R}^3$. Zatem, na mocy twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności, problem początkowy posiada dokładnie jedno rozwiązanie w pewnym otoczeniu punktu $t_0 = 0$.

1.7 Uwaga 1:

Każde równanie rzędu n

(3) $$x^{(n)} = F(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

można przekształcić do układu postaci (1).
Istotnie, określmy następująco nowe zmienne

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \dots, x_n = x^{(n-1)}.$$

Wtedy równanie (3) można zapisać w postaci układu równań

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = F(t, x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

1.8 Przykład 2:

Przekształcić problem początkowy

$$\begin{cases} x''' = 2x'' + \dfrac{t}{x'} + x^2 + t^3\& \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = -1 \end{cases} \tag{4}$$

do postaci (1), (2) Określmy nowe zmienne $x_1,\ x_2,\ x_3$ w następujący sposób:

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad x_3 = x''.$$

Stąd mamy, że

$$x_1' = x' = x_2, \quad x_2' = x'' = x_3, \quad x_3' = x''' = 2x_3 + \frac{t}{x_2} + x_1^2 + t^3.$$

Zatem problem początkowy (4) można zapisać w postaci problemu początkowego dla układu:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = 2x_3 + \frac{t}{x_2} + x_1^2 + t^3 \\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1,\ x_3(0) = -1. \end{cases}$$

1.9 Przykład 3:

Przekształcić układ równań

$$\begin{cases} x'' + y' + x = t \\ y'' + y + x' = 1 \end{cases}$$

do postaci (1). Określmy nowe zmienne w następujący sposób

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = x', \quad x_4 = y'.$$

Wówczas

$$x_1' = x_3,\ \ x_2' = x_4,\ \ x_3' = -x_1 - x_4 + t,\ \ x_4' = -x_2 - x_3 + 1.$$

Układ wyjściowy można zatem zapisać następująco w postaci układu

$$\begin{cases} x_1' = x_3 \\ x_2' = x_4 \\ x_3' = -x_1 - x_4 + t \\ x_4' = -x_2 - x_3 + 1. \end{cases}.$$

2 Układy równań różniczkowych liniowych rzędu pierwszego

2.1 Definicja 1:

Układem normalnym równań różniczkowych liniowych rzędu pierwszego nazywamy układ równań postaci (1)

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t) \end{cases}$$

gdzie $x_1, \ldots, x_n$ są nieznanymi funkcjami zmiennej niezależnej $t \in I$, a współczynniki $a_{ij}(t)$ i funkcje $f_i(t)$ są danymi funkcjami określonymi w przedziale $I = (a, b)$, gdzie a i b mogą być nieskończonościami.

2.2 Definicja 2:

Jeżeli $f_i(t) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, $t \in I$, to układ (1) nazywamy **jednorodnym**.

2.3 Definicja 3:

Rozwiązaniem układu (1) nazywamy funkcje $x_1, \ldots, x_n$ ciągłe i różniczkowalne w przedziale I, spełniające układ (1) dla każdego $t \in I$.

2.4 Definicja 4:

Warunkiem początkowym dla układu (1) nazywamy układ równości :

$$x_1(t_0) = x_{01},\ \ x_2(t_0) = x_{02}, \dots,\ x_n(t_0) = x_{0n} \tag{2}$$

gdzie $x_{01}, \dots, x_{0n}$ są danymi stałymi, a t_0 jest ustalonym punktem przedziału I .

Zapis macierzowy układu (1). Wprowadzając następujące oznaczenia:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},\ A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix},\ f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix},\ x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{bmatrix},$$

układ (1) można zapisać w postaci

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t), \tag{3}$$

a warunek początkowy (2)

$$x(t_0) = x_0. \tag{4}$$

2.5 Twierdzenie 1. O istnieniu i jednoznaczności.

Jeżeli $A(t),\ f(t)$ są ciągłe w $I \times \mathbb{R}^n$, to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $x(t)$ układu (1) określone w całym przedziale I i spełniające warunek początkowy (2).

2.6 Uwaga 1:

Twierdzenie to jest szczególnym przypadkiem **2.5 twierdzenia 1** o istnieniu i jednoznaczności dla układów równań. Istotna różnica między twierdzeniami jest taka, że w twierdzeniu ogólniejszym rozwiązanie istnieje w pewnym otoczeniu punktu t_0 a w przypadku układu równań liniowych istnieje i jest określone na całym przedziale I .

Struktura zbioru rozwiązań układu jednorodnego:

$$x'(t) = A(t)x(t),\ \ t \in I. \tag{5}$$

Niech

$$V = \{x(t) :\ \ x'(t) = A(t)x(t),\ \ t \in I\}$$

będzie zbiorem wszystkich rozwiązań układu (5) .

2.7 Twierdzenie 2:

TEZA: Zbiór wszystkich rozwiązań układu (5) jest przestrzeń wektorową n -wymiarową nad zbiorem liczb rzeczywistych.

DOWÓD: Niech

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{1n}(t) \end{bmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{bmatrix} x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{2n}(t) \end{bmatrix}$$

będą dowolnymi rozwiązaniami układu (5) i $\lambda_1,\ \lambda_2$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Korzystając z własności pochodnej dostajemy następującą tożsamość:

$$(\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t))' = \lambda_1 x_1'(t) + \lambda_2 x_2'(t) = A(t)\,(\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t))$$

więc $\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)$ jest rozwiązaniem układu (5). Zatem zbiór V jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$. Pokażemy teraz, że wymiar przestrzeni V jest n . Niech t_0 będzie dowolnym ustalonym punktem przedziału I . Definiujemy odwzorowanie liniowe L,

$$L : V \ni x \to x(t_0) \in \mathbb{R}^n.$$

Pokażemy, że odwzorowanie L jest izomorfizmem. Istotnie

$$\ker L = \{x(t) \in V : \quad x(t_0) = 0\} = \{0\}$$

wynika to z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań układów równań, ponieważ funkcja tożsamościowo równa zero jest rozwiązaniem układu (5) i spełnia warunek początkowy $x(t_0) = 0$. Zatem odwzorowanie L jest różnowartościowe. Z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności wynika, że dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}^n$ istnieje $x \in V$ takie, że $x(t_0) = x_0$. Stąd wynika, że L jest odwzorowaniem na zbiór i kończy to dowód, że L jest izomorfizmem. Ponieważ przestrzenie izomorficzne maja ten sam wymiar, więc $\dim V = \dim \mathbb{R}^n = n$.

2.8 Definicja 5:

Dowolną bazę $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ przestrzeni V będziemy nazywać **układem fundamentalnym** dla równania (5).

2.9 Uwaga 2:

Jeżeli $x(t)$ jest rozwiązaniem układu (5) i $x_1(t), \dots, x_n(t)$ jest układem fundamentalnym dla układu (5) to istnieją liczby rzeczywiste $c_1, \dots, c_n$ takie, że $x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t)$.

2.10 Uwaga 3:

Jeżeli funkcje

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{1n}(t) \end{bmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{bmatrix} x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{2n}(t) \end{bmatrix}, \ \dots, \ x_n(t) = \begin{bmatrix} x_{n1}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

stanowią układ fundamentalny dla równania (5), to

$$\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \neq 0 \ \text{ dla każdego } \ t \in I.$$

2.11 Definicja 6:

Jeżeli $x_1(t), \dots, x_n(t)$ jest układem fundamentalnym dla układu (5), to macierz

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą fundamentalną i spełnia ona równanie macierzowe

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t).$$

Podamy teraz jak wyznacza się rozwiązanie układu niejednorodnego (3) gdy znamy już układ fundamentalny rozwiązań układu jednorodnego (5).

2.12 Twierdzenie 3:

TEZA: Niech $X(t)$ będzie macierzą fundamentalną układu jednorodnego (5) to rozwiązanie ogólne układu niejednorodnego (3) jest postaci

$$x(t) = X(t) \cdot C + X(t) \cdot \int X^{-1}(t) \cdot f(t) dt \tag{6}$$

gdzie $C = [c_1, \ldots, c_n]^T$, $c_1, \ldots, c_n$ - są dowolnymi stałymi i $X^{-1}(t)$ oznacza macierz odwrotną do macierzy $X(t)$. Natomiast rozwiązanie układu (3) spełniające warunek początkowy (4) jest postaci

$$x(t) = X(t) \cdot \left(X^{-1}(t_0) \cdot x_0 + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s) \cdot f(s) ds \right). \tag{7}$$

DOWÓD: Niech $X(t)$ będzie macierzą fundamentalną układu (5). Z uwagi 2 mamy, że dla dowolnego rozwiązania $x(t)$ układu (5) istnieje macierz C taka, że

$$x(t) = X(t) \cdot C.$$

Rozwiązania równania (3) szukamy metodą uzmienniania stałej $C,$ to znaczy że C traktujemy jako funkcję zmiennej t

$$x(t) = X(t) \cdot C(t). \tag{8}$$

Różniczkując powyższą równość otrzymujemy

$$x'(t) = X'(t) \cdot C(t) + X(t) \cdot C'(t). \tag{9}$$

Podstawiając teraz (8) i (9) do równania (3) otrzymujemy

$$X'(t) \cdot C(t) + X(t) \cdot C'(t) = A(t) \cdot X(t) \cdot C(t) + f(t). \tag{10}$$

Ponieważ

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t)$$

więc z (10) mamy, że

$$X(t) \cdot C'(t) = f(t).$$

Z uwagi3 wynika, że macierz $X(t)$ jest odwracalna dla każdego $t \in I,$ więc z powyższej równości otrzymujemy

$$C'(t) = X^{-1}(t) \cdot f(t). \tag{11}$$

Całkując obustronnie powyższą równość ze względu na t dostajemy, że

$$C(t) = \int X^{-1}(t) \cdot f(t) dt + C, \quad \text{gdzie } C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Podstawiając prawą stronę powyższej równości do równania (8) otrzymamy równość (6). Jeżeli uwzględniamy warunek początkowy, to całkujemy obustronnie równanie (11) od t_0 do t i dostajemy

$$C(t) - C(t_0) = \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s) \cdot f(s) ds.$$

Podstawiając wyliczone $C(t)$ do równania (8) otrzymamy

$$x(t) = X(t) \cdot C(t_0) + X(t) \cdot \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s) \cdot f(s) ds. \tag{12}$$

Ponieważ $x_0 = x(t_0) = X(t_0) \cdot C(t_0)$,
więc

$$C(t_0) = X^{-1}(t_0) \cdot x_0.$$

Stąd i (12) dostajemy równość (7) i kończy to dowód twierdzenia.

3 Rozwiązywanie układów równań liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach, gdy wartości własne są rzeczywiste i jednokrotne

Rozważmy układ równań postaci

$$x'(t) = A \cdot x(t), \tag{1}$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Omówimy wyznaczanie układu fundamentalnego rozwiązań dla układu równań różniczkowych (1) gdy wartości własne macierzy A są rzeczywiste i jednokrotne. Rozwiązania układu (1) szukamy w postaci funkcji

$$x(t) = ve^{\lambda t}, \quad \text{gdzie} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Podstawiamy $x(t)$ i $x'(t) = \lambda v e^{\lambda t}$ do równania (1)

$$\lambda v e^{\lambda t} = A \cdot (v e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} A \cdot v.$$

Dzielimy powyższą równość obu stronie przez $e^{\lambda t}$

$$A \cdot v = \lambda v.$$

Stąd wynika, że λ jest wartością własną macierzy A a v - wektorem własnym odpowiadającym tej wartości własnej.

Z powyższych rozważań wynika, że chcąc wyznaczyć układ fundamentalny rozwiązań układu (1) należy w pierwszej kolejności wyznaczyć wartości własne macierzy A i odpowiadające im wektory własne. Wartości własne macierzy A są pierwiastkami wielomianu:

$$|A - \lambda I| = p_n \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1 \lambda + p_0 = 0, \tag{2}$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową a $p_0, \ldots, p_n$ - są to liczby rzeczywiste. Jeśli λ jest wartością własną macierzy A to przez

$$V_\lambda = \{x : \quad (A - \lambda I)x = 0\}$$

oznaczać będziemy zbiór wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ .

3.1 Twierdzenie 1:

TEZA: Jeżeli $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ są różnymi rzeczywistymi wartościami własnymi macierzy A i $v_1, \ldots, v_n$ sa odpowiednio odpowiadającymi im wektorami własnymi to funkcje

$$x_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, \; x_n(t) = v_n e^{\lambda_n t}$$

stanowią układ fundamentalny rozwiązań układu równań różniczkowych (1). Rozwiązanie ogólne układu (1) jest postaci

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \ldots + c_n x_n(t),$$

gdzie $c_1, \ldots, \; c_n$ - są to dowolne stałe.

DOWÓD: Oznaczmy przez V zbiór wszystkich rozwiązań układu (1). Z twierdzenia 2 wiemy, że V - jest przestrzenią wektorową n - wymiarową. Z kursu algebry liniowej wiadomo, że wektory własne odpowiadające różnym wartością własnym są liniowo niezależne. Zatem wektory $v_1, \ldots, \; v_n$ są liniowo niezależne a w konsekwencji funkcje $x_1(t), \ldots, \; x_n(t)$ należące do przestrzeni V są też liniowo niezależne i stanowią bazę tej przestrzeni, czyli są układem fundamentalnym rozwiązań układu równań różniczkowych (1). Stąd wynika, że jeżeli $x(t)$ jest dowolnym rozwiązaniem układu (1) to istnieją stałe rzeczywiste $c_1, \ldots, \; c_n$ takie, że

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \ldots + c_n x_n(t).$$

3.2 Przykład 1:

Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu (1) gdy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczamy wartości własne macierzy A

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$(1-\lambda)((3-\lambda)(4-\lambda)-2) = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-5) = 0$$

zatem wartościami własnymi są liczby $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 5.$. Wyznaczamy teraz kolejno podprzestrzenie własne $V_1,\ V_2$ i V_3 odpowiadające tym wartościom własnym.
Jeśli $\lambda_1 = 1$. Wtedy

$$V_1 = \{x : \quad (A - I)\cdot x = 0,\} \text{ gdzie } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy układ równań: $(A - I)\cdot x = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -\frac{3}{2}x_3. \end{cases}$$

Zatem

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_3 \\ -1.5x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad i \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jeśli $\lambda_2 = 2$. Wtedy

$$V_2 = \{x : \quad (A - 2I)\cdot x = 0.\}$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$(A - 2I)\cdot x = 0 :$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -x_1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3. \end{cases}$$

Zatem

$$V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad i \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jeśli $\lambda_3 = 5$. Wtedy

$$V_3 = \{x : \quad (A - 5I) \cdot x = 0, \} \text{ gdzie } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A - 5I) \cdot x = 0$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -4x_1 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 2x_2. \end{cases}$$

Zatem

$$V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_2, \quad x_2 \in \mathbb{R} \right\} \quad i \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Stąd wynika, że funkcje

$$x_1(t) = v_1 e^t = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \\ 1 \end{bmatrix} e^t, \quad x_2(t) = v_2 e^{2t} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}, \quad x_3(t) = v_3 e^{5t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{5t}$$

stanowią układ fundamentalny rozwiązań dla układu (1) i rozwiązanie ogólne tego układu układu ma postać

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{5t},$$

gdzie c_1, c_2, c_3 są to dowolne liczby rzeczywiste.
Wyznaczanie wartości własnych i wektorów własnych macierzy A za pomocą programu wolframalpha

```
https://www.wolframalpha.com/input/?i=eigensystem+%5B%7B1%2C0%2C0%7D%2C%7B2%2C3%2C1%7D%2C%7B0%2C2%2C4%7D%5D
```

Rozwiązanie układu (1) za pomocą programu wolframalpha

```
https://www.wolframalpha.com/input/?i=x1%27%3Dx1-x2%2B2*x3%2C+x2%27%3D-x1%2Bx2%2C+x3%27%3D-x1%2Bx3
```

4 Rozwiązywanie układów równań liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach, gdy wartości własne są jednokrotne, ale nie wszystkie rzeczywiste

Rozważmy układ równań różniczkowych postaci

$$x'(t) = A \cdot x(t), \tag{1}$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Omówimy wyznaczanie układu fundamentalnego dla układu (1) gdy wartości własne macierzy A są jednokrotne, ale nie wszyskie rzeczywiste.

4.1 Uwaga 1:

Niech

$$w(\lambda) = p_n\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0 \tag{2}$$

będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Jeżeli $\lambda = \alpha + \beta i$ jest miejscem zerowym tego wielomianu to liczba sprzężona $\overline{\lambda} = \alpha - \beta i$ jest również miejscem zerowym tego wielomianu. Istotnie, z własności sprzężenia dla liczb zespolonych mamy

$$0 = \overline{p_n\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0} = p_n\overline{\lambda}^n + p_{n-1}\overline{\lambda}^{n-1} + \cdots + p_1\overline{\lambda} + p_0$$

więc $\overline{\lambda}$ jest mniejscem zerowym wielomianu (2)
Wartości własne macierzy A są miejscami zerowymi wielomianu:

$$|A - \lambda I| = p_n\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0 = 0$$

Z uwagi 1 wynika, że jeżeli λ jest zespoloną wartością własną macierzy A to $\overline{\lambda}$ jest też wartością własną macierzy A .

4.2 Uwaga 2:

Jeżeli λ jest zespoloną wartością własną macierzy A i v jest wektorem własnym odpowiadającym tej wartości własnej to $\overline{v}$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej sprzężonej $\overline{\lambda}$. Istotnie, z własności sprzężenia dla liczb zespolonych mamy

$$0 = \overline{(A - \lambda I) \cdot v} = \overline{(A - \lambda I)} \cdot \overline{v} = (A - \overline{\lambda} I) \cdot \overline{v}$$

więc $\overline{v}$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $\overline{\lambda}$.
Niech $\lambda = \alpha + \beta i$ będzie zespoloną wartością własną macierzy A a v wektorem własnym odpowiadającym tej wartości własnej.
Z uwagi 2 wynika, że funkcje

$$ve^{\lambda t}, \ \overline{v}e^{\overline{\lambda} t}$$

są liniowo niezależnymi rozwiązaniami układu (1). Korzystając z zależności

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t + \beta t i} = e^{\alpha t} e^{\beta t i} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)),$$

funkcje

$$ve^{\lambda t}, \ \overline{v}e^{\overline{\lambda} t}$$

można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} ve^{\lambda t} =& (\Re(v) + i\Im(v))e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) = \\ & e^{\alpha t}[\Re(v)\cos(\beta t) - \Im(v)\sin(\beta t) + i(\Re(v)\sin(\beta t) + \Im(v)\cos(\beta t))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{v}e^{\overline{\lambda} t} =& (\Re(v) - i\Im(v))e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)) = \\ & e^{\alpha t}[\Re(v)\cos(\beta t) - \Im(v)\sin(\beta t) - i(\Re(v)\sin(\beta t) + \Im(v)\cos(\beta t))] \end{aligned}$$

gdzie $\Re$ oznacza część rzeczywistą a $\Im$ część urojoną. Ponieważ zbiór rozwiązań układu równań różniczkowych (1) jest przestrzenią wektorową to następujące funkcje,

$$(3) \quad x_1(t) = \frac{1}{2}(ve^{\lambda t} + \overline{v}e^{\overline{\lambda} t}) = \Re(ve^{\lambda t}) = e^{\alpha t}(\Re(v)\cos(\beta t) - \Im(v)\sin(\beta t)),$$

$$(4) \quad x_2(t) = \frac{1}{2i}(ve^{\lambda t} - \overline{v}e^{\overline{\lambda} t}) = \Im(ve^{\lambda t}) = e^{\alpha t}(\Re(v)\sin(\beta t) + \Im(v)\cos(\beta t))$$

są liniowo niezależnymi rozwiązaniami tego układu.
Stąd wynika, że dla wartości własnych zespolonych λ i $\overline{\lambda}$ wystarczy wyznaczyć tylko wektor własny v dla wartości własnej λ.

4.3 Przykład 1:

Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych (1) gdy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczamy wartości własne macierzy A

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 + 1] = 0$$

więc $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1+i,\ \lambda_3 = 1-i$ są jednokrotnymi wartościami własnymi macierzy A. Wyznaczymy teraz kolejno podprzestrzenie własne V_1 i V_2 odpowiadające wartościom własnym $\lambda_1,\ \lambda_2$.

Jeśli $\lambda_1 = 1$. Wtedy

$$V_1 = \{x : \quad (A - I) \cdot x = 0, \} \text{ gdzie } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy układ równań

$$(A - I) \cdot x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 2x_3 \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Zatem

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Niech

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

wtedy funkcja

$$x_1(t) = v_1 e^t = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t,$$

jest rozwiązaniem układu (1).

Jeśli $\lambda_2 = 1 + i$. Wtedy

$$V_2 = \{x : \quad (A - (1+i)I) \cdot x = 0\}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A - (1+i)I) \cdot x = 0$:

$$\begin{bmatrix} -i & -1 & 2 \\ -1 & -i & 0 \\ -1 & 0 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -ix_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - ix_2 = 0 \\ -x_1 - ix_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -ix_3 \\ x_2 = x_3. \end{cases}$$

Zatem

$$V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -ix_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad i \quad v_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} i.$$

Ponieważ

$$\Re(v_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \Im(v_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

to z zależności (3) i (4) wynika, że funkcje

$$x_2(t) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t \right) e^t,$$

$$x_3(t) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t \right) e^t.$$

są liniowo niezależnymi rozwiązaniami rozpatrywanego układu, odpowiadające wartościom własnym λ_2 i λ_3
Rozwiązanie ogólne układu (1) ma postać:

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t \right) e^t + c_3 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t \right) e^t$$

gdzie c_1, c_2 i c_3 są to dowolne stałe rzeczywiste.
Wyznaczanie wartości własnych i wektorów własnych macierzy A za pomocą programu wolframalpha
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=eigensystem%5B%7B1%2C-1%2C2%7D%2C%7B-1%2C1%2C0%7D%2C%7B-1%2C0%2C1%7D%5D`
Rozwiązanie układu (1) za pomocą programu wolframalpha
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=x1%27%3Dx1%2C+x2%27%3D2*x1%2B3*x2%2Bx3%2C+x3%27%3D2*x2%2B4*x3`

5 Rozwiązywanie układów równań liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach, gdy macierz układu jest diagonalizowalna

Rozważmy układ równań postaci

$$x'(t) = A \cdot x(t), \tag{1}$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Z kursu algebry liniowej wiemy, że macierz A jest diagonalizowalna jeżeli dla każdej watrości własnej wymiar podprzestrzeni własnej odpowiadającej tej wartości jest równy jej krotności. Niech λ będzie wartością własną macierzy A o krotności $k¿1$ i wymiar podprzestrzeni własnej

$$V_\lambda = \{x : \quad (A - \lambda I) \cdot x = 0\}$$

jest równy k.
Jeżeli układ wektorów $\{v_1, \ldots, v_k\}$ jest bazę przestrzeni V_λ to następujące funkcje

$$x_1(t) = v_1 e^{\lambda t}, \ldots, x_k(t) = v_k e^{\lambda t}$$

są liniowo niezależnymi rozwiązaniami układu (1).

5.1 Uwaga 1:

Przyjmujemy następujące oznaczemia dotyczące operacji na macierzach : zapis $a \cdot w_i + b \cdot w_j$ oznacza, że mnożymy wiersz i-ty przez a i wiersz j-ty przez b i wynik zapisujemy w wierszu j -tym. Analogicznie w przypadku kolumn zapis $a \cdot k_i + b \cdot k_j$ oznacza, że mnożymy kolumnę i-tą przez a i kolumnę j-tą przez b i wynik zapisujemy w kolumnie j-tej.

5.2 Przykład 1:

Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu (1), gdy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczamy wartości własne macierzy A:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{w_1-w_2}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3+\lambda & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{k_1+k_2}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)^2(\lambda+3) = 0,$$

$\lambda_1 = -3$ jest wartością własną o krotności jeden i $\lambda_2 = 3$ jest wartością własną o krotności dwa. Wyznaczymy teraz kolejno podprzestrzenie własne V_1 i V_2 odpowiadające wartościom własnym λ_1 i λ_2.
Jeśli $\lambda_1 = -3$. Wtedy

$$V_1 = \{x : \quad (A+3I)\cdot x = 0,\} \text{ gdzie } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy układ równań

$$(A+3I)\cdot x = 0 \ :$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \overset{w_3+w_2}{\iff} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3. \end{cases}$$

Zatem

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad i \quad v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Funkcja $x_1(t) = v_1 e^{-3t} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}$
jest rozwiązaniem układu (1) odpowiadającym wartości własnej λ_1.
Jeśli $\lambda_2 = 3$. Wtedy

$$V_2 = \{x : \quad (A-3I)\cdot x = 0\}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A-3I)\cdot x = 0$:

$$\begin{bmatrix}-2 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 2\\ 2 & 2 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \iff \begin{cases}-2x_1-2x_2+2x_3=0\\ -2x_1-2x_2+2x_3=0\\ 2x_1+2x_2-2x_3=0\end{cases} \iff x_1=-x_2+x_3.$$

Zatem

$$V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -x_2+x_3\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix} x_3, \quad x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Przestrzeń V_2 jest generowana przez wektory

$$v_2 = \begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix} \text{ i } v_3 = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

które są liniowo niezależne. Więc wymiar przestrzeni V_2 jest równy krotności wartości własnej λ_2.
Stąd wynika, że następujące funkcje

$$x_2(t) = \begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix} e^{3t}, \quad x_3(t) = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix} e^{3t}$$

są liniowo niezależnymi rozwiązaniami układu (1) odpowiadającymi wartości własnej λ_2 .
Fundamentalnym zbiorem rozwiązań dla układu (1) są funkcje $\{x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)\}$.
Rozwiązanie ogólne układu (1) ma postać

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix} e^{3t}$$

gdzie $c_1,\ c_2,\ c_3$ są to dowolne liczby rzeczywiste.
Wyznaczanie wartości własnych i wektorów własnych macierzy A za pomocą programu wolframalpha
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=eigensystem%5B%7B1%2C-2%2C2%7D%2C%7B-2%2C1%2C2%7D%2C%7B2%2C2%2C1%7D%5D`
Rozwiązanie układu (1) za pomocą programu wolframalpha
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=x1%27%28t%29%3Dx1-2*x2%2B2*x3%2C+x2%27%3D-2*x1%2Bx2%2B2*x3%2C+x3%27%3D2*x1%2B2*x2%2Bx3`

6 Rozwiązywanie układów równań liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach, gdy macierz układu nie jest diagonalizowalna

Rozważmy układ równań postaci

$$x'(t) = A \cdot x(t) \tag{1}$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Z algebry liniowej wiadomo, że macierz nie jest diagonalizowalna, jeżeli istnieje wartość własna, której krotność jest większa niż odpowiadający jej wymiar podprzestrzeni własnej. Niech λ będzie wartością własną macierzy A o krotności $k¿1$ i wymiar podprzestrzeni własnej

$$V_\lambda^{(0)} = \{x : \quad (A - \lambda I)x = 0\}$$

jest mniejszy niż k .
Na początek wprowadzimy pewne oznaczenia:

$$V_\lambda^{(i)} = \{x : \quad (A - \lambda I)^{i+1}x = 0\}, \quad i = 1,\ 2, \ldots\ .$$

Zbiory $V_\lambda^{(i)}$ $i = 1,\ 2, \ldots$ - są podprzestrzeniami wektorowymi przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i będziemy nazywać je podprzestrzeniami wektorów głównych rzędu i . Podprzestrzenie wektorów głównych dla wartości własnej λ tworzą ciąg wstępujący

$$V_\lambda^{(0)} \subset V_\lambda^{(1)} \subset V_\lambda^{(2)} \subset \ldots \subset V_\lambda^{(m)}.$$

Dokładniej mówiąc, istnieje liczba naturalna m taka, że

$$V_\lambda^{(0)} \subsetneq V_\lambda^{(1)} \subsetneq V_\lambda^{(2)} \subsetneq \ldots \subsetneq V_\lambda^{(m)}, \quad \dim V_\lambda^{(m)} = k \ \text{ i } \quad V_\lambda^{(m)} = V_\lambda^{(l)} \qquad \text{dla} \quad m \leqslant l.$$

6.1 Twierdzenie 1:

ZAŁOŻENIA: Niech $v^{(m)} \in V_\lambda^{(m)} \backslash V_\lambda^{(m-1)}$ i wektory $v^{(m-1)}, v^{(m-2)}, \ldots, v^{(1)}, v^{(0)}$ będą określone następująco:

$$(2) \qquad \begin{cases} v^{(m-1)} := (A-\lambda I)v^{(m)} \\ v^{(m-2)} := (A-\lambda I)v^{(m-1)} \\ \vdots \\ v^{(1)} := (A-\lambda I)v^{(2)} \\ v^{(0)} := (A-\lambda I)v^{(1)} \end{cases}$$

TEZA:
1. $v^{(0)} \in V_\lambda^{(0)} \setminus \{0\}$ i $v^{(j)} \in V_\lambda^{(j)} \setminus V_\lambda^{(j-1)}$, gdzie $j = 1, \ldots, m$.
2. Wektory $v^{(0)}, v^{(1)}, \ldots, v^{(m)}$ - są liniowo niezależne.

6.2 Twierdzenie 2:

Jeżeli wektory $v^{(0)}, v^{(1)}, \ldots, v^{(m)}$ są określone zależnością (2) to następujące funkcje są liniowo niezależnymi rozwiązaniami układu (1).

$$x_1(t) = v^{(0)}e^{\lambda t},\ x_2(t) = (v^{(1)} + tv^{(0)})e^{\lambda t},\ x_3(t) = (v^{(2)} + tv^{(1)} + \frac{t^2}{2}v^{(0)})e^{\lambda t}, \ldots,$$
$$x_{m+1}(t) = \left(v^{(m)} + tv^{(m-1)} + \frac{t^2}{2}v^{(m-2)} + \cdots + \frac{t^{(m-1)}}{(m-1)!}v^{(1)} + \frac{t^m}{m!}v^{(0)}\right)e^{\lambda t}.$$

7 Przykłady rozwiązywania układów równań liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach, gdy macierz układu nie jest diagonalizowalna

Rozważmy układ równań postaci

$$(1) \qquad x'(t) = A \cdot x(t)$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\ a_{ij} \in \mathbb{R},\ x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

7.1 Przykład 1:

Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu (1) gdy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczamy wartości własne macierzy A:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{-w_2+w_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{k_1+k_2}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -2 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0$$

zatem $\lambda = 1$ jest 3-krotnym pierwiastkiem. Wyznaczymy teraz podprzestrzeń własną odpowiadającą wartości własnej $\lambda = 1$

$$V^{(0)} = \{x : \quad (A - I) \cdot x = 0, \} \text{ gdzie } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A - I) \cdot x = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \iff x_3 = -x_1 - x_2.$$

Zatem

$$V^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} x_2, \quad x_1,\ x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wymiar przestrzeni $V^{(0)}$ wynosi 2 i jest mniejszy od krotności wartości własnej. Musimy więc wyznaczyć podprzestrzeń główną rzędu pierwszego:

$$V^{(1)} = \{x : \quad (A - I)^2 \cdot x = 0\}.$$

Ponieważ

$$(A - I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

więc $V^{(1)} = \mathbb{R}^3$.
Bazę w $V^{(1)}$ wyznaczamy następująco: bierzemy dowolny wektor $v_1^{(1)} \in V^{(1)} \setminus V^{(0)}$. Niech

$$v_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

wyznaczamy teraz wektor własny $v_1^{(0)}$ z zależności 2 w twierdzeniu 1 :

$$v_1^{(0)} = (A - I) \cdot v_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Należy teraz do wektorów $v_1^{(0)}$, $v_1^{(1)}$ dobrać wektor $v_0^{(0)} \in V^{(0)}$, tak by wektory $v_0^{(0)}$, $v_1^{(0)}$, $v_1^{(1)}$ były liniowo niezależne. Niech

$$v_0^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

wektory $v_0^{(0)}$, $v_1^{(0)}$, $v_1^{(1)}$ są liniowo niezależne, bo wyznacznik którego kolumnami są te wektory

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

jest różny od zera. Stąd wynika, że układ fundamentalny rozwiązań układu (1) jest następujący:

$$x_1(t) = v_0^{(0)} e^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^t, \quad x_2(t) = v_1^{(0)} e^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^t$$

$$x_3(t) = (v_1^{(1)} + t v_1^{(0)}) e^t = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) e^t.$$

Rozwiązanie ogólne układu (1) ma postać

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^t + c_3 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) e^t$$

gdzie c_1, c_2, c_3 są to dowolne stałe.

Wyznaczanie wartości własnych i wektorów włąsnych i głównych dla macierzy A za pomocą programu wolframalpha
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=eigensystem%5B%7B2%2C1%2C1%7D%2C%7B1%2C2%2C1%7D%2C%7B-2%2C-2%2C-1%7D%5D`
Program wyznacza wartość własną $\lambda = 1$ o krotności 3 i wartości własne i główne:

$$v_0^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie układu (1) za pomocą programu wolframalpha
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=x1%27%28t%29%3D2*x1%2Bx2%2Bx3%2C+x2%27%3Dx1%2B2*x2%2Bx3%2C++x3%27%3D-2*x1-2*x2-x3`

7.2 Przykład 2:

Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu (1) gdy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczamy wartości własne macierzy A :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3(1-\lambda)^2 = (1-\lambda)^5 = 0$$

więc $\lambda = 1$ jest wartością własną o krotności pięć. Wyznaczymy teraz podprzestrzeń własną odpowiadającą wartości własnej $\lambda = 1$

$$V^{(0)} = \{x : \quad (A - I) \cdot x = 0\}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A-I)\cdot x=0$:

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&-4&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\iff\begin{cases}x_1=0\\x_1+x_2=0\\2x_4+x_5=0\\-4x_4-2x_5=0\end{cases}\iff\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_5=-2x_4\end{cases}.$$

Zatem

$$V^{(0)}=\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\x_3\\x_4\\-2x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}x_3+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\-2\end{bmatrix}x_4,\quad x_3,\ x_4\in\mathbb{R}\right\}.$$

Wymiar przestrzeni $V^{(0)}$ wynosi **2** i jest mniejszy od krotności wartości własnej, która wynosi **5**. Musimy wyznaczyć podprzestrzeń główną, której wymiar będzie wynosił **5**.
Wyznaczamy podprzestrzeń główną rzędu pierwszego

$$V^{(1)}=\{x:\ \ (A-I)^2\cdot x=0\}.$$

Ponieważ

$$(A-I)^2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&-4&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&-4&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

więc

$$(A-I)^2\cdot x=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\x_1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\iff x_1=0\,\text{i}\,x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\in\mathbb{R}.$$

Stad wynika, że przestrzeń główna rzędu pierwszego ma postać:

$$V^{(1)}=\left(\begin{bmatrix}0\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}x_2+\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}x_3+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}x_4+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}x_5,\quad x_2,x_3,x_4,x_5\in\mathbb{R}\right).$$

Ponieważ wymiar podprzestrzeni $V^{(1)}$ jest równy **4** i jest mniejszy niż krotność wartości własnej, więc musimy wyznaczyć podprzestrzeń wektorów głównych rzędu drugiego:

$$V^{(2)} = \{x : \quad (A-I)^3 \cdot x = 0\}.$$

Ponieważ $(A-I)^3 = 0$ więc $V^{(2)} = \mathbb{R}^5$ i $\dim V^{(2)} = 5$. Bazę w przestrzeni $V^{(2)}$ wyznaczamy następująco:
1. Ponieważ $\dim V^{(2)} - \dim V^{(1)} = 5 - 4 = 1$ więc ze zbioru $V^{(2)} \setminus V^{(1)}$ bierzemy dowolny wektor $v_1^{(2)}$. Następnie wyznaczamy wektor główny rzędu pierwszego i wektor własny

$$V^{(1)} \setminus V^{(0)} \ni v_1^{(1)} := (A-I) \cdot v_1^{(2)}, \qquad V^{(0)} \ni v_1^{(0)} := (A-I) \cdot v_1^{(1)}.$$

Oczywiście tak określone wektory $v_1^{(0)}$, $v_1^{(1)}$, $v_1^{(2)}$ są liniowo niezależne.
Przyjmując:

$$v_1^{(2)} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \text{ to } v_1^{(1)} = (A-I) \cdot v_1^{(2)} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix} \text{ i } v_1^{(0)} = (A-I) \cdot v_1^{(1)} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

2. Ponieważ $\dim V^{(1)} - \dim V^{(0)} = 4 - 2 = 2$ więc ze zbioru $V^{(1)} \setminus V^{(0)}$ biorę dowolny wektor $v_2^{(1)}$ taki, że dla dowolnych liczb α_1, α_2, nierównych jednocześnie zero, zachodzi warunek: $\alpha_1 v_1^{(1)} + \alpha_2 v_2^{(1)} \in V^{(1)} \setminus V^{(0)}$. Tak określone wektory
$v_1^{(0)}$, $v_1^{(1)}$, $v_1^{(2)}$, $v_2^{(0)}$, $v_2^{(1)}$
są liniowo niezależne i stanowią bazę przestrzeni $V^{(2)}$.

$$\text{Gdy } v_2^{(1)} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \text{ to } v_2^{(0)} = (A-I) \cdot v_2^{(1)} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\-2\end{bmatrix}.$$

Z **7.2 Twierdzenia 2** wynika, że układ fundamentalny rozwiązań układu

(1) jest następujący:

$$x_1(t) = v_1^{(0)}e^t = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix} e^t, \quad x_2(t) = (v_1^{(1)} + tv_1^{(0)})e^t = \left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right) e^t$$

$$x_3(t) = (v_1^{(2)} + tv_1^{(1)} + \frac{1}{2}t^2 v_1^{(0)})e^t = \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}t^2\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right) e^t$$

$$x_4(t) = v_2^{(0)}e^t = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\-2\end{bmatrix} e^t, \quad x_5(t) = (v_2^{(1)} + tv_2^{(0)})e^t = \left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\-2\end{bmatrix}\right) e^t.$$

Zatem rozwiązanie ogólne układu (1) ma postać

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + c_3x_3(t) + c_4x_4(t) + c_5x_5(t)$$

gdzie $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5$ dowolne stałe.
Rozwiązanie układu (1) za pomocą programu wolframalpha
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=x1%27%28t%29%3Dx1%2C+x2%27%3Dx1%2Bx2%2C++x3%27%3Dx1%2Bx2%2Bx3%2C+x4%27%3D3*x4%2Bx5%2C+x5%27%3D-4*x4%2Bx5`

7.3 Zadanie 1:

Treść zadania: Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu (1), gdy

$$A = \begin{bmatrix}1 & 4 & 0 & 0 & 0\\0 & 3 & 0 & 0 & 0\\1 & -4 & 1 & 0 & 0\\3 & -1 & 1 & 2 & 1\\1 & 2 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie: Wyznaczamy wartości własne macierzy A :

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(3-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(3-\lambda)(1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3(3-\lambda)^2 = 0$$

zatem mamy dwie wartości własne $\lambda_1 = 1$ o krotności 3 i $\lambda_2 = 3$ o krotności **2**.
Wyznaczymy podprzestrzeń własną dla wartości własnej $\lambda_1 = 1$.

$$V_1^{(0)} = \{x : \ (A-I)\cdot x = 0, \}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A-I)\cdot x = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ x_1 - 4x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_5 = -x_3 - x_4 \end{cases} \qquad x_3,\ x_4 \in \mathbb{R}$$

Zatem

$$V_1^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \\ -x_3-x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} x_4, \qquad x_3,\ x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wymiar przestrzeni $V_1^{(0)}$ wynosi **2** i jest mniejszy od krotności wartości własnej. Musimy więc wyznaczyć podprzestrzeń główną rzędu pierwszego.

Wyznaczamy podprzestrzeń główną rzędu pierwszego dla λ_1

$$V_1^{(1)} = \{x : \quad (A - I)^2 \cdot x = 0\}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A - I)^2 \cdot x = 0$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 8x_2 = 0 \\ 4x_2 = 0 \\ -4x_2 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = -\frac{2}{5}(x_3 + x_4 + x_5) \end{cases} , \quad x_3,\ x_4,\ x_5 - \text{ dowolne liczby rzeczywiste.}$$

Zatem

$$V_1^{(1)} = \left(\begin{bmatrix} -\frac{2}{5}(x_3 + x_4 + x_5) \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_5, \quad x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right)$$

a więc wymiar podprzestrzeni $V_1^{(1)}$ wynosi 3 i jest równy krotności wartości własnej λ_1.
Bierzemy dowolny wektor

$$v_1^{(1)} \in V_1^{(1)} \setminus V_1^{(0)}.$$

Jeżeli

$$v_1^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

to odpowiadający jemu wektor własny $v_1^{(0)}$ wyznaczamy z zależnośc:

$$v_1^{(0)} = (A - I) \cdot v_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Do wektorów $v_1^{(0)}$, $v_1^{(1)}$ należy teraz dobrać wektor $v_0^{(0)} \in V_1^{(0)}$ tak, by wektory $v_0^{(0)}$, $v_1^{(0)}$, $v_1^{(1)}$ były liniowo niezależne.
Jeśli

$$v_0^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

to łatwo sprawdzić, że wektory $v_0^{(0)}$, $v_1^{(0)}$, $v_1^{(1)}$ są liniowo niezależne. Z Twierdzenia 2 wynika, że natępujące funkcje są liniowo niezależnymi rozwiązaniami układu (1):

$$x_1(t) = v_0 e^t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t, \qquad x_2(t) = v_1 e^t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} e^t$$

$$x_3(t) = (v_1^{(1)} + t v_1) e^t = \left(\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \right) e^t.$$

Wyznaczymy teraz podprzestrzeń własną dla wartości własnej $\lambda_2 = 3$:

$$V_2^{(0)} = \{x : \quad (A - 3I) \cdot x = 0, \}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A - 3I) \cdot x = 0$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

stosując metodę Gaussa

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]
\underset{\substack{w_1+w_2 \\ w_1+w_4 \\ 3w_1+w_3}}{\Longleftrightarrow}
\left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]
\underset{\substack{\frac{5}{2}w_2+w_3 \\ 2w_2+w_4}}{\Longleftrightarrow}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]
\underset{-3w_3+4w_4}{\Longleftrightarrow}
\left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -7 & 0 \end{array}\right]
\Longleftrightarrow
$$

$$
\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 7x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}
\Longleftrightarrow
\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = -\frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_5 \\ x_4 = x_5 \end{cases}
\Longleftrightarrow
\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = x_5 \end{cases}.
$$

Zatem

$$
V_2^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_5, \quad x_5 \in \mathbb{R} \right\}.
$$

Wymiar przestrzeni $V_2^{(0)}$ wynosi 1 i jest mniejszy niż krotność wartości własnej λ_2 . Wyznaczamy teraz podprzestrzeń wektorów głównych rzędu pierwszego

$$
V_2^{(1)} = \{x : \quad (A - 3I)^2 \cdot x = 0\}.
$$

Rozwiązujemy układ równań $(A - 3I)^2 \cdot x = 0$.

$$
\begin{bmatrix} 4 & -8 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ -4 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & -2 & 2 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x_1 - 8x_2 = 0 \\ -4x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 0 \\ -7x_1 + 11x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}.
$$

$$
\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ -7x_1 + 11x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}
$$

Rozwiązujemy powyższy układ, stosując metodę Gaussa

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 11 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{w_1+w_2 \\ 7w_1+w_3 \\ w_1+w_4}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{3w_2+w_3 \\ w_2+w_4}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{w_3+w_4}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 = 4x_4 - 4x_5 \\ x_2 = -x_3 = 2x_4 - 2x_5 \\ x_3 = -2x_4 + 2x_5 \end{cases}, \quad x_4,\ x_5 \in \mathbb{R}.$$

Zatem

$$V_2^{(1)} = \left\{ \begin{bmatrix} 4x_4 - 4x_5 \\ 2x_4 - 2x_5 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_5, \quad x_4,\ x_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wymiar przestrzeni $V_2^{(1)}$ wynosi 2 i jest równy krotności wartości własnej λ_2. Wybieramy dowolny wektor $v_2^{(1)} \in V_2^{(1)} \setminus V_2$. Jeżeli

$$v_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

to wyznaczamy teraz wektor własny $v_2^{(0)}$ z zależności:

$$v_2^{(0)} = (A - 3I) \cdot v_2^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Następujące funkcje są liniowo niezależnymi rozwiązaniami układu (1):

$$x_4(t) = v_2 e^{3t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} e^{3t}, \qquad x_5(t) = (v_2^{(1)} + t v_3) e^{3t} = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} \right) e^{3t}.$$

Funkcje $x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t),\ x_4(t),\ x_5(t)$ są liniowo niezależne i stanowią układ fundamentalny układu (1). Zatem rozwiązanie ogólne układu (1) ma postaci

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t) + c_4 x_4(t) + c_5 x_5(t)$$

gdzie $c_1, \ldots, c_5$ dowolne stałe.

8 Macierz wykładnicza i jej własności

Przez $M(n \times n,\ \mathbb{C})$ będziemy oznaczać zbiór macierzy o wymiarach $n \times n$ i wartościach zespolonych.

8.1 Definicja 1:

Normę w przestrzeni $M(n \times n,\ \mathbb{C})$ określamy następująco:

$$\|A\| = \max\{|a_{ij}|,\quad i, j = 1, \ldots, n\}.$$

Łatwo zauważyć, że zachodzi nierówność $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$.
Dla $t \in \mathbb{R}$ definiujemy ciąg macierzy $\{S_k(t)\}$

$$S_k(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{t^i}{i!} A^i.$$

Elementy macierzy $S_k(t)$ będziemy oznaczać $b_{ij}^{(k)}(t)$

$$S_k(t) = \begin{bmatrix} b_{11}^{(k)}(t) \ldots b_{1n}^{(k)}(t) \\ \vdots \ddots \vdots \\ b_{n1}^{(k)}(t) \ldots b_{nn}^{(k)}(t) \end{bmatrix}.$$

8.2 Uwaga 1:

Dla dowolnego ustalonego t ciąg $\{S_k(t)\}$ jest ciągiem Cauchy'ego to znaczy, że dla dowolnego ε¿0 istnieje N takie, że dla $k, m \geqslant N$ zachodzi nierówność

$$(1) \qquad \|S_m(t) - S_k(t)\| \leqslant \varepsilon.$$

Istotnie dla m¿k mamy

$$(2) \qquad \|S_m(t) - S_k(t)\| = \|\sum_{i=k+1}^{m} \frac{t^i}{i!} A^i\| \leqslant \sum_{i=k+1}^{m} \frac{|t|^i}{i!} \|A\|^i.$$

Z kryterium zbieżności d'Alemberta wynika, ze szereg liczbowy

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|t|^i}{i!} \|A\|^i$$

jest zbieżny.
Zatem istnieje N , że dla $k \geqslant N$ zachodzi nierówność:

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|t|^i}{i!} \|A\|^i < \varepsilon.$$

Stąd i z (2) wynika (1) co kończy dowód uwagi 1.
Ponieważ dla każdego $i,\ j = 1, \ldots,\ n$ mamy nierówność

$$|b_{ij}^{(m)}(t) - b_{ij}^{(k)}(t)| \leqslant \|S_m(t) - S_k(t)\|,$$

więc z uwagi 1 wynika, że ciąg $\{b_{ij}^{(k)}(t)\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Zatem istnieje granica tego ciągu

$$b_{ij}(t) = \lim_{k \to \infty} b_{ij}^{(k)}(t).$$

8.3 Definicja 2:

Macierz **wykładniczą** e^{tA} definujemy jako granicę ciągu macierzy $\{S_k(t)\}$:

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} b_{11}(t) \ldots b_{1n}(t) \\ \vdots \ddots \vdots \\ b_{n1}(t) \ldots b_{nn}(t) \end{bmatrix} = \lim_{k \to \infty} \begin{bmatrix} b_{11}^{(k)}(t) \ldots b_{1n}^{(k)}(t) \\ \vdots \ddots \vdots \\ b_{n1}^{(k)}(t) \ldots b_{nn}^{(k)}(t) \end{bmatrix} = \lim_{k \to \infty} S_k(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} A^i.$$

8.4 Uwaga 2:

(3) $$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

Istotnie, ponieważ szereg

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} A^i$$

jest zbieżny niemal jednostajnie w $\mathbb{R}$, więc możemy różniczkować go wyraz po wyrazie. Zatem mamy, że

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{t^i}{i!}A^i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}A^i = A\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}A^{i-1} = Ae^{tA}.$$

Zauważmy ponadto, że zachodzi równość $Ae^{tA} = e^{tA}A$.

8.5 Uwaga 3:

Dla dowolnej macierzy $M(n \times n,\ \mathbb{C})$ i dowolnych liczb $s,\ t \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

(4) $$e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}.$$

Istotnie, ze wzoru na pochodną iloczynu i uwagi 2 mamy:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(e^{(s+t)A}e^{-tA}\right) =& \frac{d}{dt}\left(e^{(s+t)A}\right)e^{-tA} + e^{(s+t)A}\frac{d}{dt}\left(e^{-tA}\right) = \\ & e^{(s+t)A}Ae^{-tA} - e^{(s+t)A}Ae^{-tA} = 0.\end{aligned}$$

Zatem wartość iloczynu $e^{(s+t)A}e^{-tA}$ nie zależy od t i jest równa wartości dla $t = 0$

(5) $$e^{(s+t)A}e^{-tA} = e^{(s+0)A}e^{-0A} = e^{sA}I = e^{sA}, \quad \text{bo} \quad e^0 = I.$$

Stąd dla $s = 0$ mamy $e^{tA}e^{-tA} = I$,
więc e^{-tA} jest macierzą odwrotną do macierzy e^{tA}

$$e^{-tA} = (e^{tA})^{-1}.$$

Mnożąc obie strony równości (4) przez e^{tA} , otrzymujemy równość (3) .

8.6 Uwaga 4:

Dla dowolnych macierzy $A,\ B \in M(n \times n,\ \mathbb{C})$: jeżeli $AB = BA$, to

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}.$$

Istotnie z uwagi 2 mamy

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA}\right) =$$
$$e^{t(A+B)}(A+B)e^{-tB}e^{-tA} - e^{t(A+B)}Be^{-tB}e^{-tA} - e^{t(A+B)}e^{-tB}Ae^{-tA}.$$

Ponieważ $AB = BA$, to $AB^i = B^iA$, dla $i = 1, \dots, n$, więc

$$e^{-tB}A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i}{i!} B^iA = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i}{i!} AB^i = A\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i}{i!} B^i = Ae^{-tB}.$$

Zatem

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA}\right) = 0,$$

czyli $e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA}$ nie zależy od t, więc jest równe wartości dla $t = 0$

$$e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} = I.$$

Mnożąc obustronnie powyższą równość kolejno przez e^{tA} i e^{tB} otrzymamy zależność (6)

8.7 Uwaga 5:

Macierz e^{tA} jest macierzą fundamentalną układu równań

$$x'(t) = A \cdot x(t), \tag{8}$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Wynika to bezpośrednio z uwagi 2.
Zatem rozwiązanie ogólne układu (7) przy użyciu macierzy e^{tA} można zapisać następująco:

$$x(t) = e^{tA} \cdot C \quad \text{gdzie} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad c_1, \dots,\ c_n \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Natomiast rozwiązanie równania (7) z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$ gdzie

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{bmatrix}$$

można zapisać następująco:

$$x(t) = e^{tA} \cdot e^{-t_0 A} \cdot x_0 = e^{(t-t_0)A} \cdot x_0.$$

9 Wyznaczanie macierzy wykładniczej

Do wyznaczania macierzy wykładniczej e^{tA} wykorzystamy następujące twierdzenie:

9.1 Twierdzenie 1:

ZAŁOŻENIA: Niech A będzie dowolną rzeczywistą lub zespoloną macierzą kwadratową wymiaru $n \times n$.

TEZA: Wtedy istnieje nieosobliwa macierz P , taka że $A = PJP^{-1}$, gdzie J jest tak zwaną **macierzą Jordana macierzy** A . Macierz Jordana ma postać:

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & J_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_k \end{bmatrix}.$$

elementy J_i macierzy J są zwane **klatkami Jordana**.
Omówimy teraz jak wyznacza się klatki Jordana i macierz nieosobliwą P.
Niech A będzie rzeczywistą macierzą kwadratową wymiaru $n \times n$, a

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k, \qquad k \leqslant n$$

będą wartościami własnymi macierzy A . Niech

$$V_i^{(0)} = \{x : \ (A - \lambda_i I) \cdot x = 0\},$$

będzie podprzestrzenią własną odpowiadająca wartości własnej λ_i .
Rozważymy następujące przypadki.

1. Wymiar przestrzeni $V_i^{(0)}$ jest równy krotności wartości własnej λ_i. Niech m - oznacza krotność wartości własnej λ_i i niech układ wektorów

$$\{v_{i_1}^{(0)}, \ldots, v_{i_m}^{(0)}\}$$

będzie bazą przestrzeni $V_i^{(0)}$. Każdemu wektorowi $v_{i_j}^{(0)}$ odpowiada pojedyncza klatka Jordana, którą będziemy oznaczać $J_{i_j} = [\lambda_i]$. W tym przypadku mamy m jednakowych pojedynczych klatek Jordana.
2. Wymiar przestrzeni $V_i^{(0)}$ jest mniejszy od krotności wartości własnej λ_i . Jeżeli m - jest krotnością wartości własnej λ_i a r - wymiarem przestrzeni własnej $V_i^{(0)}$, wtedy mamy m wektorów $\{v_{i_1}^{(0)}, \ldots, v_{i_m}^{(0)}\}$, z których tylko pierwszych r stanowi bazę przestrzeni $V_i^{(0)}$ a pozostałe $m - r$ wektorów są wektorami głównymi odpowiednich rzędów związanymi niekoniecznie ze wszystkimi wektorami własnymi $\{v_{i_1}^{(0)}, \ldots, v_{i_r}^{(0)}\}$. Każdemu wektorowi własnemu $v_{i_1}^{(0)}, \ldots, v_{i_r}^{(0)}$ odpowiada odpowiednio klatka Jordana $J_{i_1}, \ldots, J_{i_r}$. Jeżeli wektorowi $v_{i_j}^{(0)}$ - nie odpowiada żaden wektor główny, to klatka Jordana odpowiadająca wektorowi $v_{i_j}^{(0)}$ jest jednoelementowa $J_{i_j} = [\lambda_i]$. Jeżeli natomiast wektorowi własnemu $v_{i_j}^{(0)}$ odpowiadają wektory główne $v_{i_j}^{(1)}, \ldots, v_{i_j}^{(k)}$ związane z wektorem $v_{i_j}^{(0)}$ zależnościami:

$$(1) \qquad \begin{cases} v_{i_j}^{(0)} = (A - \lambda I)v_{i_j}^{(1)} \\ v_{i_j}^{(1)} = (A - \lambda I)v_{i_j}^{(2)} \\ \vdots \\ v_{i_j}^{(k-1)} = (A - \lambda I)v_{i_j}^{(k)} \end{cases}$$

to klatka Jordana odpowiadająca wektorowi $v_{i_j}^{(0)}$ ma wymiar $(k+1)\times(k+1)$

$$J_{i_j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

W macierzy J_{i_j} jej pierwszej kolumnie odpowiada wektor własny $v_{i_j}^{(0)}$, drugiej wektor główny $v_{i_j}^{(1)}$, odpowiednio $k+1$ -kolumnie wektor główny $v_{i_j}^{(k)}$. Kolumnami macierzy nieosobliwej P są wektory własne i główne. Konstrukcje macierzy P wyjaśnimy na przykładzie.
Niech macierz A wymiaru 5×5 ma dwie wartości własne: λ_1 o krotności 3, której odpowiadają wektory $v_1^{(0)}$, $v_1^{(1)}$, $v_1^{(2)}$ określone zależnością

(1) oraz wartość własną λ_2 o krotności **2** , której odpowiadają wektory $v_2^{(0)}$, $v_2^{(1)}$ określone zależnością (1). Wówczas klatki Jordana odpowiadające wartościom własnym λ_1 (odpowiednio λ_2) mają postać

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Macierz Jordana J ma wtedy postać:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

a kolumnami macierzy P są odpowiednio współrzędne wektorów

$$v_1^{(0)},\ v_1^{(1)},\ v_1^{(2)},\ v_2^{(0)},\ v_2^{(1)}.$$

Macierz Jordana J można zapisać też w postaci

$$J = \begin{bmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_1 \end{bmatrix},$$

ale wtedy kolumnami macierzy P są odpowiednio współrzędne wektorów

$$v_2^{(0)},\ v_2^{(1)},\ v_1^{(0)},\ v_1^{(1)},\ v_1^{(2)}.$$

9.2 Uwaga 1:

Jeżeli $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$ to $e^{tA} = P \cdot e^{tJ} \cdot P^{-1}$.
Istotnie, ponieważ $P \cdot P^{-1} = I$ więc

$$(P \cdot J \cdot P^{-1})^k = P \cdot J \cdot P^{-1} \cdot P \cdot J \cdot P^{-1} \cdots P \cdot J \cdot P^{-1} = P \cdot J^k \cdot P^{-1}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} e^{tA} =& I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots + \frac{(At)^n}{n!} + \cdots = \\ & P \cdot P^{-1} + P \cdot J \cdot P^{-1} t + (P \cdot J \cdot P^{-1})^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + (P \cdot J \cdot P^{-1})^n \frac{t^n}{n!} + \cdots = \\ & P \cdot P^{-1} + P \cdot J \cdot P^{-1} t + P \cdot J^2 \cdot P^{-1} \frac{t^2}{2!} + \cdots + P \cdot J^n \cdot P^{-1} \frac{t^n}{n!} + \cdots = \\ & P \cdot (I + Jt + J^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + J^n \frac{t^n}{n!} + \cdots) \cdot P^{-1} = P \cdot e^{tJ} \cdot P^{-1} \end{aligned}$$

co należało wykazać.

9.3 Uwaga 2:

Jeżeli

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_k \end{bmatrix} \quad \text{to} \quad e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{tJ_k} \end{bmatrix}.$$

Wynika to bezpośrednio z faktu, że m-ta potęga macierzy J jest równa

$$J^m = \begin{bmatrix} J_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_k^m \end{bmatrix}.$$

Niech J_i będzie klatką Jordana wymiaru $s \times s$

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Macierz J_i możemy zapisać jako sumę macierzy $J_i = D_i + M_i$
gdzie

$$D_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad M_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $D_i \cdot M_i = M_i \cdot D_i$ więc na mocy uwagi 4 mamy

$$e^{tJ_i} = e^{t(D_i + M_i)} = e^{tD_i} \cdot e^{tM_i}.$$

9.4 Uwaga 3:

$M_i^n = 0 \quad$ dla $\quad n \geqslant s.$
Prawdziwość tej zależności pokażemy na przykładzie, gdy $s = 3$

$$M_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ {M_i}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ M_i^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Policzymy teraz e^{tD_i} . Ponieważ

$$D_i^m = \begin{bmatrix} \lambda_i^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_i^m \end{bmatrix}$$

więc

$$e^{tD_i} = I + tD_i + \frac{(tD_i)^2}{2!} + \frac{(tD_i)^3}{3!} + \dots + \frac{(tD_i)^n}{n!} + \dots =$$
$$\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\lambda_i t)^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\lambda_i t)^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}.$$

Policzymy teraz e^{tM_i} . Z uwagi 3 mamy

$$e^{tM_i} = I + tM_i + \frac{(tM_i)^2}{2!} + \frac{(tM_i)^3}{3!} + \dots + \frac{(tM_i)^{s-1}}{(s-1)!} =$$
$$\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \dots & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{s-3}}{(s-3)!} & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$e^{tJ_i} = e^{tD_i} \cdot e^{tM_i} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!}e^{\lambda_i t} & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{s-3}}{(s-3)!}e^{\lambda_i t} & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!}e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}.$$

Wyznaczymy teraz macierze J, P, i e^{tJ}.

9.5 Przykład 1:

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wartościami własnymi macierzy A są

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1 + i,\ \lambda_3 = 1 - i,$$

a odpowiadające im wektory własne generujące podprzestrzenie własne $V_1^{(0)},\ V_2^{(0)},\ V_3^{(0)}$ są odpowiednio równe:

$$v_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2^{(0)} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3^{(0)} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Klatki Jordana odpowiadające wektorom $v_1^{(0)},\ v_2^{(0)},\ v_3^{(0)}$ są odpowiednio równe:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix},\ J_2 = \begin{bmatrix} 1 + i \end{bmatrix},\ J_3 = \begin{bmatrix} 1 - i \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & -i & i \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uwzględniając fakt, że

$$e^{\alpha t + \beta t i} = e^{\alpha t} e^{\beta t i} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

otrzymujemy

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{tJ_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{t(1+i)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t(1-i)} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t(\cos t + i \sin t) & 0 \\ 0 & 0 & e^t(\cos t - i \sin t) \end{bmatrix}.$$

Wyznaczanie macierzy Jordana J i macierzy P za pomocą programu wolframalpha
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=Jordan+decomosition%5B%7B1%2C+-1%2C2%7D%2C+%7B-1%2C+1%2C0%7D%2C%7B-1%2C0%2C1%7D%5D`
W tym przypadku M=A a S=P.
Wyznaczanie macierzy e^{At} za pomocą programu wolframalpha
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=MatrixExp%5B%7B%7B1%2C+-1%2C2%7D%2C+%7B-1%2C+1%2C0%7D%2C%7B-1%2C0%2C1%7D%7D+t%5D`

9.6 Przykład 2:

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wartościami własnymi macierzy A są
$\lambda_1 = -3$ i $\lambda_2 = 3$ - o krotności **2**. Podprzestrzeń własna $V_1^{(0)}$ jest generowana przez wektor

$$v_1^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a podprzestrzeń własna $V_2^{(0)}$ ma wymiar **2** i generowana jest przez wektory

$$v_2^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad v_3^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wektorom własnym $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$ i $v_3^{(0)}$ odpowiadają odpowiednio następujące klatki Jordana:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{tJ_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

9.7 Przykład 3:

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}$. Pięciokrotną wartością własną macierzy A jest $\lambda = 1$. Podprzestrzeń własna $V^{(0)}$ jest dwuwymiarowa i generowana jest przez wektory $v_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $v_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Wektorowi włąsnemu $v_1^{(0)}$ odpowiadają następujące wektory główne rzędu pierwszego i drugiego $v_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ a wektorowi własnemu $v_2^{(0)}$ odpowiada następujący wektor główny rzedu pierwszego $v_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Wektorom własnym $v_1^{(0)}$ i $v_2^{(0)}$ odpowiadają odpowiednio następujące klatki Jordana: $J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Zatem

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{1}{2}t^2e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

9.8 Przykład 4:

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Wartościami własnymi macierzy A są $\lambda_1 = 1$ - o krotności **3** i $\lambda_2 = 3$ - o krotności **2**. Podprzestrzeń własna odpowiadają-

ca wartości własnej λ_1 jest dwuwymiarowa i generowana jest przez wektory $v_0^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ i $v_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.
Podprzestrzeń własna odpowiadająca wartości własnej λ_2 jest jednowymiarowa i generowana jest przez wektor $v_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$. Wektorowi włąsnemu $v_2^{(0)}$ odpowiada następujący wektor główny rzędu pierwszego $v_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Wektorom własnym $v_0^{(0)}$, $v_1^{(0)}$ i $v_2^{(0)}$ odpowiadają odpowiednio następujące klatki Jordana: $J_0 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$, $J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Zatem

$$J = \begin{bmatrix} J_0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_0} & 0 & 0 \\ 0 & e^{tJ_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{tJ_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

10 Przykłady rozwiązywania układów równań liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach przy użyciu macierzy wykładniczej

10.1 Przykład 1:

Wyznaczyć rozwiązanie problemu początkowego:

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad , \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy wartości własne macierzy A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{w_2+w_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{-k_1+k_2}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

zatem $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ są jednokrotnymi wartościami własnymi macierzy A. Wyznaczamy teraz podprzestrzenie własne dla λ_1, λ_2 i λ_3.
Dla $\lambda_1 = 1$.

$$V_1^{(0)} = \{X : \quad (A - I) \cdot X = 0\},$$

$$(A - I) \cdot X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Zatem podprzestrzeń własna $V_1^{(0)}$ ma postać

$$V_1^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 \ , \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

i wektorem własnym generującym tę podprzestrzeń jest

$$v_1^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dla $\lambda_2 = 2$.
$V_2^{(0)} = \{X : \quad (A - 2I) \cdot X = 0\}$,

$$(A-2I)\cdot X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}.$$

Zatem podprzestrzeń własna $V_2^{(0)}$ ma postać

$$V_2^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_2, \quad x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

i wektorem własnym generującym tę podprzestrzeń jest

$$v_2^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dla $\lambda_3 = 3$.
$V_3^{(0)} = \{X : \quad (A - 3I) \cdot X = 0\}$,

$$(A - 3I) \cdot X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Zatem podprzestrzeń własna $V_3^{(0)}$ ma postać

$$V_3^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} x_1, \quad x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

i wektorem własnym generującym tą podprzestrzeń jest

$$v_3^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Macierze J, P i P^{-1} mają więc postać:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$, więc

$$e^{tA} = P \cdot e^{tJ} \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} e^t - e^{2t} + e^{3t} & e^t - e^{2t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ e^{2t} - e^{3t} & e^{2t} & e^{2t} - e^{3t} \\ -e^t + e^{2t} & -e^{-t} + e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie problemu początkowego (1) jest zatem postaci

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t - e^{2t} + e^{3t} & e^t - e^{2t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ e^{2t} - e^{3t} & e^{2t} & e^{2t} - e^{3t} \\ -e^t + e^{2t} & -e^{-t} + e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

10.2 Uwaga 1:

Jeżeli szukamy rozwiązania ogólnego układu równań $x'(t) = A \cdot x(t)$ i wartości własne macierzy A są rzeczywiste, to rozwiązanie ogólne jest postaci:

$$x(t) = e^{tA} \cdot C = P \cdot e^{tJ} \cdot P^{-1} \cdot C = P \cdot e^{tJ} \cdot \tilde{C} \quad \text{gdzie} \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{c_1} \\ \vdots \\ \tilde{c_n} \end{bmatrix}$$

$\tilde{c_1}, \ldots, \tilde{c_n}$ są to dowolne stałe rzeczywiste. W takiej sytuacji nie ma potrzeby wyznaczać macierzy odwrotnej: P^{-1}, ponieważ dla dowolnego stałego wektora C istnieje stała $\tilde{C}$ taka, że $\tilde{C} = P^{-1} \cdot C$.

10.3 Przykład 2:

Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu równań:

$$x'(t) = A \cdot x(t) \quad \text{gdzie} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczamy wartości własne macierzy A :

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{-w_2+w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \lambda-1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 2 & \\ -2 & 1 & -1-\lambda & \end{vmatrix} \overset{k_1+k_2}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2+1) = 0$$

zatem $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = -i$ są jednokrotnymi wartościami własnymi macierzy A. Wyznaczamy teraz podprzestrzenie własne dla $\lambda_1,\ \lambda_2$ i λ_3.

Dla $\lambda_1 = 1.$

$$V_1^{(0)} = \{X : \quad (A-I)\cdot X = 0\},$$

$$(A-I)\cdot X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \overset{r_1+r_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_3 \\ x_1 = 0 \end{cases}.$$

Zatem podprzestrzeń własna $V_1^{(0)}$ ma postać

$$V_1^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, \qquad x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

i wektorem własnym generującym tą podprzestrzeń jest $v_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dla $\lambda_2 = i.$

$$V_2^{(0)} = \{X : \ (A-iI)\cdot X = 0\},$$

$$(A-iI)\cdot X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-i & -1 & 2 \\ 1 & -i & 2 \\ -2 & 1 & -1-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2-i)x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - ix_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + (-1-i)x_3 = 0 \end{cases} \overset{-r_2+r_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (1-i)x_1 + (i-1)x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - (1+i)x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = \frac{i-1}{2}x_2 \end{cases}.$$

Zatem podprzestrzeń własna $V_2^{(0)}$ ma postać

$$V_2^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 2x_2 \\ (i-1)x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ i-1 \end{bmatrix} x_2, \qquad x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

i wektorem własnym generującym tę podprzestrzeń jest $v_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ i-1 \end{bmatrix}$.

Dla $\lambda_3 = -i$.
W tym przypadku $V_3^{(0)} = \overline{V_2^{(0)}}$ i

$$v_3^{(0)} = \overline{v_2^{(0)}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1-i \end{bmatrix}.$$

Macierze J, P i P^{-1} mają więc postać:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1+i & -1-i \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}i & \frac{1}{4}i & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i & -\frac{1}{4}i & \frac{1}{2}i \end{bmatrix}.$$

Wyznaczamy macierz e^{tJ}

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-it} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & \cos t + i\sin t & 0 \\ 0 & 0 & \cos t - i\sin t \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$e^{tA} = P \cdot e^{tJ} \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1+i & -1-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & \cos t + i\sin t & 0 \\ 0 & 0 & \cos t - i\sin t \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}i & \frac{1}{4}i & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i & -\frac{1}{4}i & \frac{1}{2}i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sin t + \cos t & -\sin t & 2\sin t \\ -e^t + 2\sin t + \cos t & e^t - \sin t & 2\sin t \\ \frac{1}{2}(-e^t - 3\sin t + \cos t) & \frac{1}{2}(e^t + \sin t - \cos t) & \cos t - \sin t \end{bmatrix}.$$

Zatem rozwiązanie ogólne ma postać:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sin t + \cos t & -\sin t & 2\sin t \\ -e^t + 2\sin t + \cos t & e^t - \sin t & 2\sin t \\ \frac{1}{2}(-e^t - 3\sin t + \cos t) & \frac{1}{2}(e^t + \sin t - \cos t) & \cos t - \sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (2\sin t + \cos t)c_1 & -\sin t c_2 & 2\sin t c_3 \\ (-e^t + 2\sin t + \cos t)c_1 & (e^t - \sin t)c_2 & 2\sin t c_3 \\ \frac{1}{2}(-e^t - 3\sin t + \cos t)c_1 & \frac{1}{2}(e^t + \sin t - \cos t)c_2 & (\cos t - \sin t)c_3 \end{bmatrix}$$

gdzie c_1, c_2 , c_3 są to dowolne stałe rzeczywiste.
Przykład 2 pokazuje, że jeżeli macierz A ma wartości własne zespolone, to macierz $P \cdot e^{tJ}$ jest zespolona, natomiast macierz $P \cdot e^{tJ} \cdot P^{-1}$ jest rzeczywista, dlatego w takich przypadkach musimy wyznaczyć macierz P^{-1}, bo inaczej otrzymalibyśmy rozwiązanie zespolone układu.

10.4 Zadanie 1:

Treść zadania: Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu równań:

$$x'(t) = A \cdot x(t), \qquad \text{gdzie} \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie: Obliczamy wartości własne macierzy A :

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda)^2 + 1 + 3(1-\lambda) = -(\lambda-2)^3 = 0$$

zatem $\lambda = 2$ jest 3-krotną wartością własną macierzy A. Wyznaczymy podprzestrzeń własną odpowiadającą wartości własnej $\lambda = 2$. $V^{(0)} = \{X : (A-2I) \cdot X = 0, \}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 2x_1 \\ x_2 = x_1 \end{cases}$$

zatem

$$V^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_1, \quad x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wymiar podprzestrzeni własnej $V^{(0)}$ jest równy **1** i jest mniejszy od krotności wartości własnej. W związku z tym, wyznaczamy podprzestrzeń główną rzędu pierwszego

$$V^{(1)} = \{X : \quad (A-2I)^2 \cdot X = 0, \}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_3 = x_1 + x_2$$

zatem

$$V^{(1)} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_2, \qquad x_1,\ x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wymiar podprzestrzeni głównej rzędu pierwszego $V^{(1)}$ jest równy **2** i jest mniejszy od krotności wartości własnej. W tej sytuacji wyznaczamy podprzestrzeń główną rzędu drugiego

$$V^{(2)} = \{X : \quad (A - 2I)^3 \cdot X = 0,\ \}.$$

Ponieważ $(A - 2I)^3 = 0$, więc $V^{(2)} = \mathbb{R}^3$. Bierzemy teraz dowolny wektor $v^{(2)} \in V^{(2)} \setminus V^{(1)}$. Niech $v^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ wtedy

$$v^{(1)} = (A - 2I)v^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

i

$$v^{(0)} = (A - 2I)v^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Wektory $v^{(0)}$, $v^{(1)}$ i $v^{(2)}$ są liniowo niezależne. Stąd wynika, że macierze J i P są postaci:

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem macierz e^{tJ} jest następująca

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{1}{2}t^2e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

i rozwiązanie ogólne rozważanego układu można zapisać następująco :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = P \cdot e^{tJ} \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{1}{2}t^2e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} + 2e^{2t} & \frac{1}{2}t^2e^{2t} + 2te^{2t} + e^{2t} \\ e^{2t} & te^{2t} + e^{2t} & \frac{1}{2}t^2e^{2t} + te^{2t} \\ 2e^{2t} & 2te^{2t} + 3e^{2t} & t^2e^{2t} + 3te^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

gdzie c_1, c_2, c_3 są to dowolne stałe, należące do zbioru liczb rzeczywistych.

11 Przykłady rozwiązywania układów równań liniowych niejednorodnych o stałych współczynnikach metodą uzmienniania stałych

Rozważmy układ równań:

$$(1) \qquad x'(t) = A \cdot x(t) + f(t) \quad \text{dla} \quad t \in I \subset \mathbb{R}$$

gdzie

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Jeżeli funkcje

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{bmatrix} x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad x_n(t) = \begin{bmatrix} x_{n1}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

stanowią układ fundamentalny rozwiązań dla układu jednorodnego :

$$(2) \qquad x'(t) = A \cdot x(t) \ ,$$

to macierz

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

nazywamy **macierzą fundamentalną układu**(2). Z twierdzenia 3 wynika, że rozwiązanie ogólne układu równań (1) jest postaci

$$(3) \qquad x(t) = X(t) \cdot \left(C + \int X^{-1}(t) \cdot f(t)dt \right)$$

gdzie $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, a $c_1, \dots, c_n$ -są to dowolne stałe. Natomiast rozwiązanie układu równań (1) spełniającego warunek początkowy

$$(4) \qquad x_1(t_0) = x_{01}, \ x_2(t_0) = x_{01}, \ \dots, \ x_n(t_0) = x_{0n} \ ,$$

gdzie $x_{01}, \dots, x_{0n}$, są dane, a t_0 jest ustalonym punktem przedziału I, jest postaci:

$$(5) \qquad x(t) = X(t) \cdot \left(X^{-1}(t_0) \cdot x_0 + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s) \cdot f(s)ds \right).$$

11.1 Przykład 1:

Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu (1) gdy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad f(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Wyznaczamy wartości własne macierzy A :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

więc $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_1 = 4$ są pierwiastkami tego równania.
Dla $\lambda_1 = 1$ wyznaczymy podprzestrzeń własną

$$V_1^{(0)} = \{x : \ (A - I) \cdot x = 0, \} \text{ gdzie } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A - I) \cdot x = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \iff x_2 = -x_1.$$

Zatem

$$V_1^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} x_1 \quad x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Podprzestrzeń $V_1^{(0)}$ jest generowana przez wektor własny

$$v_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dla $\lambda_1 = 4$ wyznaczymy podprzestrzeń własną

$$V_2^{(0)} = \{x : \ (A - 4I) \cdot x = 0, \} \quad \text{gdzie} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A - 4I) \cdot x = 0$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff x_2 = 2x_1.$$

Zatem

$$V_2^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_1 \quad x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Podprzestrzeń $V_2^{(0)}$ jest generowana przez wektor $v_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
Wyznaczymy teraz macierz e^{tA}, która jest macierzą fundamentalną rozważanego układu. Ponieważ $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$, gdzie

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

więc

$$e^{tA} = P \cdot e^{tJ} \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} & -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} & \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ macierz odwrotną do macierzy e^{tA} jest macierz e^{-tA}, więc rozwiązanie rozważanego układu jest postaci

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \cdot \left(C + \int e^{-tA} \cdot f(t) dt \right) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} & -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} & \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \int \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ e^t \end{bmatrix} dt \right) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} & -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} & \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \int \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} + \frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3} \end{bmatrix} dt \right) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} & -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} & \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int (\frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}) dt \\ \int (-\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} + \frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3}) dt \end{bmatrix} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} & -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} & \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{12}e^{-4t} - \frac{1}{9}e^{-3t} - \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}t + c_1 \\ \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-4t} - \frac{2}{9}e^{-3t} + \frac{1}{3}t + c_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{36}(-27 + 12(c_1 + c_2)e^{4t} - 4e^t(1 - 6c_1 + 3c_2 + 3t)) \\ \frac{1}{18}(9 + 12(c_1 + c_2)e^{4t} + 2e^t(-2 - 6c_1 + 3c_2 + 3t)) \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie układu równań za pomocą programu wolframalpha
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=x1%27%28t%29%3D2*x1%2Bx2%2B1%2C+x2%27%3D2*x1%2B3*x2%2Be%5Et`

11.2 Przykład 2:

Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu (1), gdy $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $f(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} e^{2t}$. Wyznaczamy wartości własne macierzy A :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = 0$$

więc $\lambda_1 = 1 - i$ i $\lambda_2 = 1 + i$ są pierwiastkami tego równania.
Dla $\lambda_1 = 1 - i$ wyznaczymy podprzestrzeń własną

$$V_1^{(0)} = \{x : \ (A - \lambda_1 I) \cdot x = 0, \}, \ \text{gdzie } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A - (1 - i) \cdot I) \cdot x = 0$:

$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 i - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 i = 0 \end{cases} \iff x_2 = x_1 i.$$

Zatem

$$V_1^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} x_1 \quad x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Podprzestrzeń $V_1^{(0)}$ jest generowana przez wektor własny

$$v_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} i.$$

Do wyznaczenia układu fundamentalnego rozwiązań dla układu jednorodnego wykorzystamy zależności 3 i 4. Ponieważ $\alpha = 1$ i $\beta = 1$, więc

$$\Re(v_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \Im(v_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Stąd z zależności 3 i 4 mamy następujące rozwiązania liniowo niezależne, odpowiadające wartościom własnym λ_1 i λ_2 :

$$x_1(t) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t \right) e^t,$$

$$x_2(t) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t \right) e^t.$$

Macierz fundamentalna układu jednorodnego ma postać:

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix}.$$

Ponieważ macierz odwrotna do macierzy $X(t)$ jest następująca

$$X^{-1}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos t & -e^{-t} \sin t \\ e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t \end{bmatrix},$$

więc rozwiązanie rozważanego układu jest postaci

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} = X(t) \cdot \left(C + \int X^{-1}(t) \cdot f(t) dt \right) = \\
&\begin{bmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \int \begin{bmatrix} e^{-t} \cos t & -e^{-t} \sin t \\ e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} e^{2t} dt \right) = \\
&\begin{bmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \int \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix} dt \right) = \begin{bmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 + e^t \end{bmatrix} = \\
&\begin{bmatrix} e^t (c_1 \cos t + (c_2 + e^t) \sin t) \\ e^t (-c_1 \sin t + (c_2 + e^t) \cos t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Rozwiązanie układu równań za pomocą programu wolframalpha
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=x1%27%28t%29%3Dx1-x2%2Be%5Et*sin%28t%29%2C+x2%27%3Dx1%2Bx2%2Be%5Et*cos%28t%29`