

Równania różniczkowe część II

J.JANUS, M.LUŚTYK

1 Opis matematyczny układów drgających

Do opisu matematycznego układów drgających najczęściej stosujemy następujące metody:

i) **Zasadę d'Alemberta.** W czasie ruchu dowolnego układu punktów materialnych (układu mechanicznego sztywnego lub układu sprężysto-tłumiącego) siły rzeczywiste zewnętrzne działające na punkty tego układu równoważą się z siłami bezwładności, a więc zachodzi równanie równowagi sił:

$$-\sum_{j=1}^n m_j \vec{a}_j + \sum_{j=1}^n \vec{P}_{ij} = 0$$

i równanie równowagi momentów sił:

$$-\sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times m_j \vec{a}_j + \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times \vec{P}_{ij} = 0,$$

gdzie

$\vec{P}_{ij}$ - siły zewnętrzne (czynne i bierne - styczne reakcje więzów)

$\vec{r}_{ij}$ - promień wektora położenia punktu materialnego w układzie współrzędnych prostokątnych x, y, z .

ii) **Metoda równań Lagrange'a II rodzaju.** W słownym sformułowaniu metodę można opisać następująco: warunkiem niezbędnym i wystarczającym aby układ sił czynnych i biernych oraz sił bezwładności w każdej chwili ruchu czynił zadość warunkom równowagi, jest — aby suma prac wszystkich tych sił przy odpowiadających im przemieszczeniach wirtualnych równała się zeru. Dla układów o n - stopniach swobody równania Lagrange'a II-go rodzaju mają postać:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} = F_j - R_j, \quad j = 1, \dots, n$$

gdzie

E_k - energia kinetyczna układu,

E_p - energia potencjalna układu,

F_j - zewnętrzna siła uogólniona czynna, działająca w kierunku współrzędnej uogólnionej q_j , zgodnie z dodatnim zwrotnym tej współrzędnej,

R_j - uogólniona siła oporu odpowiadająca współrzędnej q_j , zwrócona przeciwnie do F_j .

Energia kinetyczna ciała sztywnego wykonującego ruch postępowy z prędkością v wynosi:

$$E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2,$$

gdzie

m - masa ciała,

v - prędkość środka masy ciała.

Energia kinetyczna ciała sztywnego wykonującego ruch obrotowy z prędkością kątową ω względem jednej z głównych osi bezwładności wynosi:

$$E_k = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2,$$

gdzie

J - moment bezwładności ciała względem osi obrotu.

Energia kinetyczna ciała sztywnego równa się sumie energii kinetycznej ruchu postępowego środka masy i energii kinetycznej ruchu obrotowego wokół środka masy ciała.

Energia potencjalna (ciała, układu ciał) — część energii mechanicznej (poza energią kinetyczną) związana ze zmianą wymiarów lub postaci ciała w wyniku odkształceń sprężystych, zmianą wzajemnego położenia ciał wchodzących w skład układu bądź oddziaływaniem innych układów lub pól fizycznych (grawitacyjnych, elektrycznych, magnetycznych). Energia potencjalna jest funkcją położenia; jej wartość w danym stanie ciała lub układu równa się pracy zewnętrznej, jaką trzeba wykonać, żeby zmienić położenie od określonego stanu początkowego, w którym przyjmuje się zerowy poziom energii potencjalnej ($E = 0$). Energia potencjalna liniowego elementu sprężystego o sztywności k wynosi:

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2,$$

gdzie x - wydłużenie skrócenie elementu.

Drgania dzielimy na:

- 1) drgania o jednym stopniu swobody,
- 2) drgania o skończonej liczbie stopni swobody,
- 3) drgania układów o masach rozłożonych w sposób ciągły (nieskończenie wiele stopni swobody).

Drgania mogą być:

- a) swobodne, gdy nie ma siły wymuszającej, wymuszenie jest poprzez warunki początkowe (początkowe przemieszczenie, początkowa prędkość, zadane układowi drgającemu),

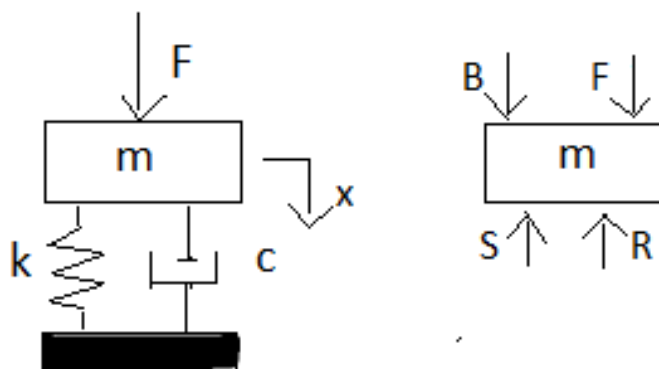
b) wymuszone, gdy układ drgający poddany jest działaniu jednej lub kilku sił wymuszających.

Układy na które nie działają siły zewnętrzne nazywamy autonomicznymi, a te na które działają siły zewnętrzne nieautonomicznymi.

Przykłady układów drgających.

Przykład (1)

Rozpatrzmy układ o jednym stopniu swobody składający się z ciała o masie m mogącego poruszać się pionowo, pobudzanego do drgań siłą F , podpartego elementami sztywnymi o sztywności k , i elementami tłumiacymi o współczynniku tłumienia c . Układ przedstawiony jest na rysunku 1



Rysunek 1: Rozpatrywany model i układ sił działających na ciało o masie m .

Do opisu tego modelu zastosujemy zasadę d'Alemberta.

Dla powyższego modelu, równanie równowagi sił jest następujące:

$$(1) \quad F + B - S - R = 0,$$

gdzie

F - siła zewnętrzna

B - siła bezwładności, $B = -m \cdot \ddot{x}$

S - siła z elementu sprężystego, $S = k \cdot x$, gdzie k sztywność sprężyny a x przemieszczenie ciała

R - siła oporu tłumika wiskotycznego, $R = c \cdot \dot{x}$, gdzie c współczynnik tłumienia a $\dot{x}$ prędkość przemieszczenia.

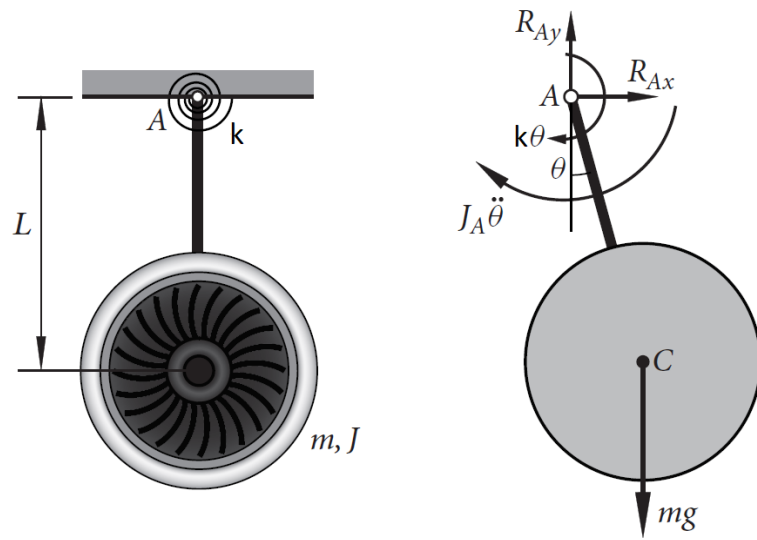
Po podstawieniu powyższych zależności do równania (1) otrzymamy równanie:

$$(2) \quad F - m \cdot \ddot{x} - k \cdot x - c \cdot \dot{x} = 0.$$

Przykład (2)

W tym przykładzie omówimy wibracje poziome silnika odrzutowego. Zakładamy, że silnik o masie m i momencie bezwładności J względem punktu C zawieszony jest na sztywnym pręcie o długości L (masę pręta pomijamy) przymocowanym do skrzydła samolotu w punkcie A z możliwością obracania się w tym punkcie.

Rozpatrywany układ ma jeden stopień swobody (może się obracać w punkcie A).



Rysunek 2: Wibracje poziome silnika odrzutowego.

Jeżeli jak na rysunku wychylenie układu jest o kąt θ przeciwnie do ruchu wskazówek zegara to sprężyna obrotowa zapewnia moment przywracania zgodny z ruchem wskazówek zegara $k \cdot \theta$.

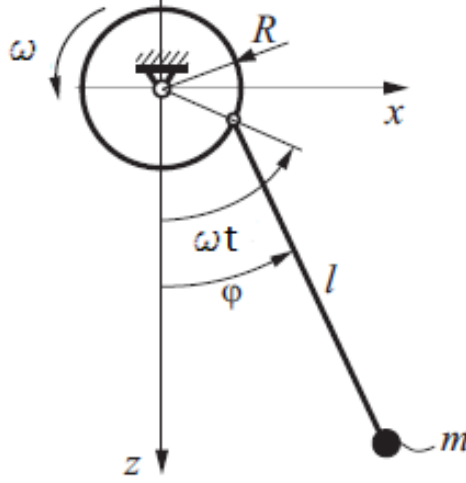
Ponieważ przyspieszenie kątowne układu $\ddot{\theta}$ jest przeciwnie skierowane do ruchu wskazówek zegara, więc siła bezwładności $-J_A \cdot \ddot{\theta}$ jest skierowana zgodnie z ruchem wskazówek zegara gdzie $J_A = m \cdot L^2 + J$ moment bezwładności względem punktu A .

Przyjmując, że $\sin\theta \approx \theta$ i stosując zasadę d'Alemberta dostajemy równanie ruchu

$$J_A \cdot \ddot{\theta} + (k + m \cdot g \cdot L) \cdot \theta = 0.$$

Przykład (3)

Opisać ruch wahadła o długości l i masie m , którego koniec zamocowany jest do koła o promieniu R , obracającego się ze stałą prędkością kątową rys.3.



Rysunek 3: Wahadło z ruchomym punktem zawieszenia.

Układ ma jeden stopień swobody – jako współrzędna uogólnioną przyjmujemy kąt odchylenia wahadła od pionu.

Zależności pozwalające na wyznaczenie równań ruchu przy użyciu równań Lagrange’a są następujące:

– współrzędne określające położenie punktu materialnego o masie m :

$$x = R \sin \omega t + l \sin \varphi, \quad z = R \cos \omega t + l \cos \varphi,$$

– składowe prędkości punktu materialnego o masie m :

$$\dot{x} = R\omega \cos \omega t + l\dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{z} = -R\omega \sin \omega t - l\dot{\varphi} \sin \varphi,$$

– energia kinetyczna układu:

$$E_k = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m \left((R\omega \cos \omega t + l\dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + (-R\omega \sin \omega t - l\dot{\varphi} \sin \varphi)^2 \right),$$

– energia potencjalna układu:

$$E_p = -mgz = -mg(R \cos \omega t + l \cos \varphi).$$

Wyznaczamy pochodne występujące w równaniach Lagrange’a II-go rodzaju

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0 :$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m \left(l^2 \ddot{\varphi} - Rl\omega(\omega - \dot{\varphi}) \sin(\omega t - \varphi) \right),$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = m (Rl\omega \dot{\varphi} \sin(\omega t - \varphi)),$$

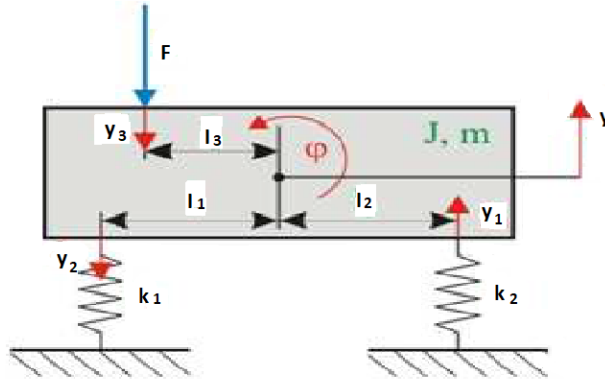
$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = mgl \sin \varphi.$$

Podstawiając powyższe zależności do równania Lagrange'a i dokonując stosownych uproszczeń dostajemy równanie ruchu:

$$l\ddot{\varphi} - R\omega^2 \sin(\omega t - \varphi) + g \sin \varphi = 0.$$

Przykład (4)

Dla modelu przedstawionego na rysunku 4 wyznaczyć równania ruchu.



Rysunek 4: Model układu wraz ze współzrędnymi uogólnionymi.

Do opisu tego modelu zastosujemy równania Lagrange'a II rodzaju. Zakładamy, że drgania są małe i kąt φ przyjmuje niewielkie wartości. Przez m oznaczamy masę ciała a przez J moment bezwładności względem środka ciężkości. Wartość y określa przemieszczenie środka ciężkości w pionie a y_1 , y_2 deformacje sprężyn w pionie. Zakładamy, że brak deformacji poprzecznych sprężyn.

Rozpatrywany układ ma dwa stopnie swobody: porusza się w pionie i obraca względem środka ciężkości. Jako współzrędne uogólnione przyjmujemy y i φ .

Energia kinetyczna układu

$$E_k = \frac{1}{2} (J \cdot \dot{\varphi}^2 + m \cdot \dot{y}^2).$$

Energia potencjalna układu

$$E_p = \frac{1}{2} (k_1 \cdot y_1^2 + k_2 \cdot y_2^2) + m \cdot g \cdot y.$$

Równania więzów

$$y_1 = y - \varphi \cdot l_1, \quad y_2 = y + \varphi \cdot l_2.$$

Powyższe zależności są prawdziwe tylko dla małych kątów. Po uwzględnieniu równań więzów energia potencjalna układu wynosi

$$E_p = \frac{1}{2} (k_1 \cdot (y - \varphi \cdot l_1)^2 + k_2 \cdot (y + \varphi \cdot l_2)^2) + m \cdot g \cdot y.$$

Równania Lagrange'a II rodzaju opisujące równania ruchu dla naszego układu mają postać:

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial y} = F,$$

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = F \cdot l_3.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}} &= m \cdot \dot{y}; & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}} \right) &= m \cdot \ddot{y}, \\ \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} &= J \cdot \dot{\varphi}; & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= J \cdot \ddot{\varphi}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial y} = k_1 \cdot (y - \varphi \cdot l_1) + k_2 \cdot (y + \varphi \cdot l_2) + m \cdot g,$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = -k_1 \cdot l_1 \cdot (y - \varphi \cdot l_1) + k_2 \cdot l_2 \cdot (y + \varphi \cdot l_2),$$

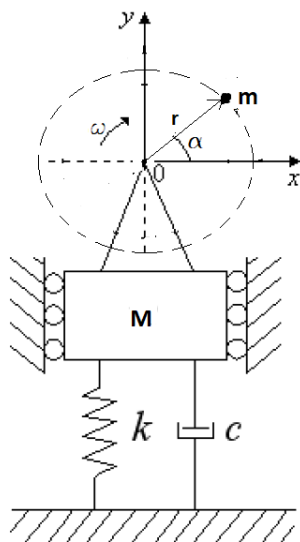
więc równania (3) i (4) przyjmują postać:

$$m \cdot \ddot{y} + k_1 \cdot (y - \varphi \cdot l_1) + k_2 \cdot (y + \varphi \cdot l_2) + m \cdot g = F,$$

$$J \cdot \ddot{\varphi} - k_1 \cdot l_1 \cdot (y - \varphi \cdot l_1) + k_2 \cdot l_2 \cdot (y + \varphi \cdot l_2) = F \cdot l_3.$$

Przykład (5)

Rozpatrzmy układ jak na rys.5.



Rysunek 5:

Układ składa się z ciała o masie M i wirującego dookoła osi O ciała o masie m w odległości r z prędkością kątową ω . Wirujący układ przymocowany do ciała o masie M które może się przemieszczać tylko w pionie.

Wyznaczyć równanie ruchu układ. Niech $\alpha(t)$ będzie kątem zakreślonym przez ciało w czasie t :

$$\alpha(t) = \omega \cdot t.$$

Niech y_1 - oznacza przemieszczenie ciała o masie m a y - przemieszczenie ciała o masie M z położenia równowagi w kierunku osi y .

Równanie ruchu w kierunku osi y ma postać:

$$(5) \quad M\ddot{y} + m\ddot{y}_1 + c\dot{y} + ky = 0.$$

Ponieważ

$$y_1 - y = r \sin(\omega t)$$

więc po dwukrotnym zróżniczkowaniu otrzymamy

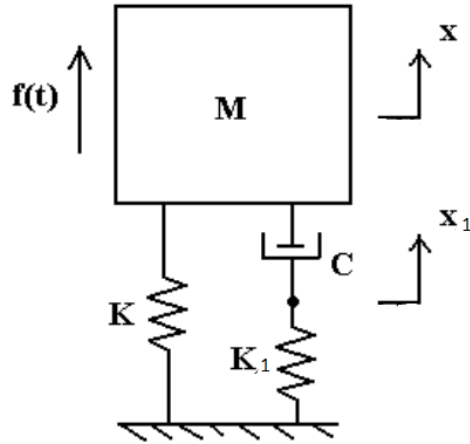
$$\ddot{y}_1 - \ddot{y} = -r\omega^2 \sin(\omega t).$$

Wyliczając stąd $\ddot{y}_1$ i podstawiając do (5) otrzymamy

$$(M + m)\ddot{y} + c\dot{y} + ky = mr\omega^2 \sin(\omega t).$$

Przykład (6)

Dla modelu przedstawionego na rysunku 6 wyznaczyć równania ruchu.



Rysunek 6:

Na ciało o masie M działa siła $f(t)$, x - oznacza przemieszczenie ciała o masie M z położenia równowagi a x_1 - przemieszczenie punktu łączącego sprężynę o sztywności K_1 z tłumikiem. Rozpatrywany układ ma dwa stopnie swobody i równanie ruchu opisane jest układem równań:

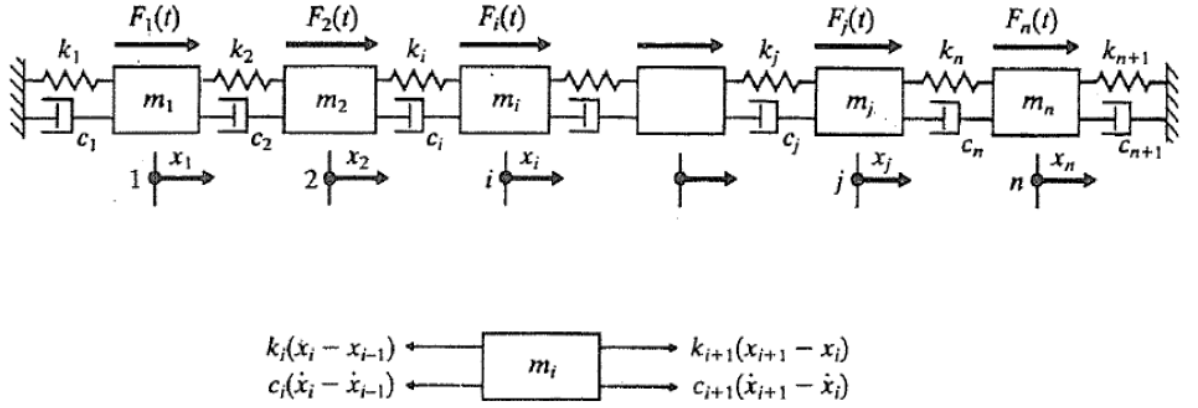
$$M\ddot{x} + C(\dot{x} - \dot{x}_1) + Kx = f(t),$$

$$C(\dot{x} - \dot{x}_1) = K_1 x_1.$$

Przykład (7)

Rozpatrzmy układ na rysunku 7: składający się z n ciał o masach $m_1, \dots, m_n$ połączonych między sobą sprężynami i tłumikami wiskotycznymi, ponadto na ciało o masie m_i działa siła $F_i(t)$.

Napisać równanie ruchu dla powyższego układu.



Rysunek 7:

Do omawianego układu stosując drugą zasadę Newtona otrzymamy następujący układ równań:

$$m_i \ddot{x}_i = -k_i(x_i - x_{i-1}) + k_{i+1}(x_{i+1} - x_i) - c_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) + c_{i+1}(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) + F_i(t),$$

gdzie $i = 1, \dots, n$ i przyjmujemy, że $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $x_{n+1} = 0$, $\dot{x}_{n+1} = 0$.

Dla $n = 4$ powyższy układ zapiszemy w postaci macierzowej:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(t),$$

gdzie:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix}, \quad \ddot{x} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \\ F_4(t) \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{pmatrix},$$

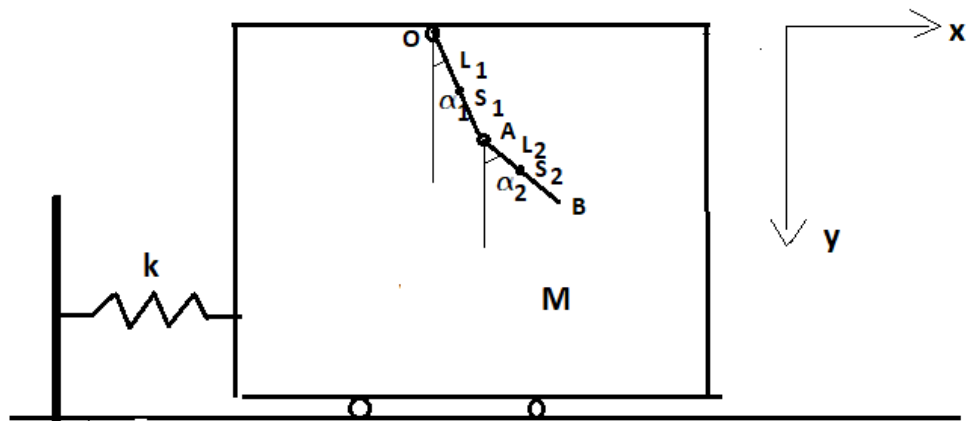
$$C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 + c_5 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 \end{pmatrix}.$$

Przykład (8)

Rozpatrzmy układ przedstawiony na rysunku 8. Układ składa się z pojazdu który połączony jest sprężyną o sztywności k . Pojazd porusza się bez tarcia i wewnątrz przymocowane jest wahadło podwójne.

Wyznaczyć równanie ruchu układu?



Rysunek 8:

Przez M - oznaczamy masę pojazdu, k - sztywność sprężyny, m_1, L_1 - masę i długość odcinak OA a m_2, L_2 -masę i długość odcinak AB wahadła. Przez S_1, S_2 -oznaczamy środki i zarazem środki mas odpowiednio odcinków OA i AB.

Rozpatrywany układ ma trzy stopnie swobody. Do opisu tego modelu zastosujemy równania Lagrange'a II rodzaju, przyjmujemy następujące zmienne

uogólnione x, α_1, α_2 :

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0,$$

$$(7) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\alpha}_1} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial E_p}{\partial \alpha_1} = 0,$$

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\alpha}_2} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial E_p}{\partial \alpha_2} = 0.$$

Wyznamy teraz prędkości punktu O czyli prędkość pojazdu, prędkości środków mas S_1, S_2 i punktu A.

$$\vec{v}_O = (\dot{x}, 0),$$

$$\vec{r}_{OS_1} = \left(\frac{L_1}{2} \sin \alpha_1, \frac{L_1}{2} \cos \alpha_1 \right),$$

$$\vec{v}_{S_1} = \frac{d\vec{r}_{OS_1}}{dt} + \vec{v}_O = \left(\dot{x} + \frac{L_1}{2} \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1, -\frac{L_1}{2} \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 \right),$$

$$\vec{r}_{OA} = (L_1 \sin \alpha_1, L_1 \cos \alpha_1),$$

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_{OA}}{dt} + \vec{v}_O = (\dot{x} + L_1 \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1, -L_1 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1),$$

$$\vec{r}_{AS_2} = \left(\frac{L_2}{2} \sin \alpha_2, \frac{L_2}{2} \cos \alpha_2 \right),$$

$$\vec{v}_{S_2} = \frac{d\vec{r}_{AS_2}}{dt} + \vec{v}_A = \left(\dot{x} + L_1 \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 + \frac{L_2}{2} \dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2, -L_1 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 - \frac{L_2}{2} \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 \right).$$

Wyznamy teraz energię kinetyczną układu.

Energia kinetyczna pojazdu o masie M :

$$E_1 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2,$$

energia kinetyczna pręta OA:

$$E_2 = \frac{1}{2} m_1 v_{S_1}^2 = \frac{1}{2} m_1 \left[\left(\dot{x} + \frac{L_1}{2} \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 \right)^2 + \left(\frac{L_1}{2} \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 \right)^2 \right],$$

energia kinetyczna pręta OA związana z ruchem obrotowym:

$$E_3 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\alpha}_1^2 = \frac{1}{12} m_1 L_1^2 \dot{\alpha}_1^2,$$

gdzie $J_1 = \frac{1}{6}m_1L_1^2$ moment bezwładności pręta OA względem punktu O, energia kinetyczna pręta AB:

$$E_4 = \frac{1}{2}m_2v_{S_2}^2 = \frac{1}{2}m_2 \left[\left(\dot{x} + L_1\dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 + \frac{L_2}{2}\dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 \right)^2 + \left(L_1\dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 + \frac{L_2}{2}\dot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 \right)^2 \right],$$

energia kinetyczna pręta AB związana z ruchem obrotowym:

$$E_5 = \frac{1}{2}J_2\dot{\alpha}_2^2 = \frac{1}{12}m_2L_2^2\dot{\alpha}_2^2,$$

gdzie $J_1 = \frac{1}{6}m_2L_2^2$ moment bezwładności pręta AB względem punktu A. Energia kinetyczna układu wynosi zatem:

$$E_k = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5.$$

Wyznamy energię potencjalną układu.

Energia potencjalna sprężyny:

$$E_{p1} = \frac{1}{2}kx^2,$$

energia potencjalna pręta OA:

$$E_{p2} = -m_1gy_{S_1} = -m_1g\frac{L_1}{2}\cos \alpha_1,$$

energia potencjalna pręta AB:

$$E_{p3} = -m_2gy_{S_2} = -m_2g \left(L_1 \cos \alpha_1 + \frac{L_2}{2} \cos \alpha_2 \right).$$

Energia potencjalna układu wynosi zatem

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 - m_1g\frac{L_1}{2}\cos \alpha_1 - m_2g \left(L_1 \cos \alpha_1 + \frac{L_2}{2} \cos \alpha_2 \right).$$

Wyznamy równanie (6).

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m_1\left(\dot{x} + \frac{L_1}{2}\dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1\right) + m_2\left(\dot{x} + L_1\dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 + \frac{L_2}{2}\dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right) = & M\ddot{x} + m_1 \left[\ddot{x} + \frac{L_1}{2} \left(\ddot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 - \dot{\alpha}_1^2 \sin \alpha_1 \right) \right] + \\ & m_2 \left[\ddot{x} + L_1 \left(\ddot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 - \dot{\alpha}_1^2 \sin \alpha_1 \right) + \frac{L_2}{2} \left(\ddot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 - \dot{\alpha}_2^2 \sin \alpha_2 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_k}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial E_p}{\partial x} &= kx.\end{aligned}$$

Zatem równanie (6) ma postać:

$$\begin{aligned}M\ddot{x} + m_1 \left[\ddot{x} + \frac{L_1}{2} (\ddot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 - \dot{\alpha}_1^2 \sin \alpha_1) \right] + kx + \\ m_2 \left[\ddot{x} + L_1 (\ddot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 - \dot{\alpha}_1^2 \sin \alpha_1) + \frac{L_2}{2} (\ddot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 - \dot{\alpha}_2^2 \sin \alpha_2) \right] = 0\end{aligned}$$

Wyznaczamy równanie (7).

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\alpha}_1} &= m_1 \left[\left(\dot{x} + \frac{L_1}{2} \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 \right) \frac{L_1}{2} \cos \alpha_1 + \frac{L_1^2}{2} \dot{\alpha}_1 \sin^2 \alpha_1 \right] + \frac{1}{6} m_1 L_1^2 \dot{\alpha}_1 + \\ &\quad m_2 \left[\left(\dot{x} + L_1 \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 + \frac{L_2}{2} \dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 \right) L_1 \cos \alpha_1 + (L_1 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 + \frac{L_2}{2} \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_2) L_1 \sin \alpha_1 \right] \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\alpha}_1} \right) &= m_1 \left[\left(\ddot{x} + \frac{L_1}{2} (\ddot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 - \dot{\alpha}_1^2 \sin \alpha_1) \right) \frac{L_1}{2} \cos \alpha_1 - \left(\dot{x} + \frac{L_1}{2} \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 \right) \frac{L_1}{2} \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 \right] + \\ &\quad m_1 \frac{L_1^2}{2} \left(\ddot{\alpha}_1 \sin^2 \alpha_1 + 2 \dot{\alpha}_1^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \frac{1}{3} \ddot{\alpha}_1 \right) + \\ &\quad m_2 \left[\ddot{x} + L_1 (\ddot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 - \dot{\alpha}_1^2 \sin \alpha_1) + \frac{L_2}{2} (\ddot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 - \dot{\alpha}_2^2 \sin \alpha_2) \right] L_1 \cos \alpha_1 - \\ &\quad m_2 \left(\dot{x} + L_1 \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 + \frac{L_2}{2} \dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 \right) L_1 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 + \\ &\quad m_2 \left[L_1 (\ddot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 + \dot{\alpha}_1^2 \cos \alpha_1) + \frac{L_2}{2} (\ddot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 + \dot{\alpha}_2^2 \cos \alpha_2) \right] L_1 \sin \alpha_1 + \\ &\quad m_2 \left(L_1 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 + \frac{L_2}{2} \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 \right) L_1 \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1. \\ \frac{\partial E_k}{\partial \alpha_1} &= m_1 \frac{L_1}{2} \dot{\alpha}_1 \left[- \left(\dot{x} + \frac{L_1}{2} \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 \right) \sin \alpha_1 + \cos \alpha_1 \right] + m_2 L_1 \dot{\alpha}_1 \cdot \\ &\quad \left[- \left(\dot{x} + \frac{L_1}{2} \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 + \frac{L_2}{2} \dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 \right) \sin \alpha_1 + \left(L_1 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 + \frac{L_2}{2} \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 \right) \cos \alpha_1 \right], \\ \frac{\partial E_p}{\partial \alpha_1} &= L_1 g \sin \alpha_1 \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right).\end{aligned}$$

Zatem równanie (7) ma postać:

$$\begin{aligned}
& m_1 \left[\left(\ddot{x} + \frac{L_1}{2} (\ddot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 - \dot{\alpha}_1^2 \sin \alpha_1) \right) \frac{L_1}{2} \cos \alpha_1 - \left(\dot{x} + \frac{L_1}{2} \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 \right) \frac{L_1}{2} \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 \right] + \\
& m_1 \frac{L_1^2}{2} \left(\ddot{\alpha}_1 \sin^2 \alpha_1 + 2 \dot{\alpha}_1^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \frac{1}{3} \ddot{\alpha}_1 \right) + \\
& m_2 \left[\ddot{x} + L_1 (\ddot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 - \dot{\alpha}_1^2 \sin \alpha_1) + \frac{L_2}{2} (\ddot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 - \dot{\alpha}_2^2 \sin \alpha_2) \right] L_1 \cos \alpha_1 - \\
& m_2 \left(\dot{x} + L_1 \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 + \frac{L_2}{2} \dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 \right) L_1 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 + \\
& m_2 \left[L_1 (\ddot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 + \dot{\alpha}_1^2 \cos \alpha_1) + \frac{L_2}{2} (\ddot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 + \dot{\alpha}_2^2 \cos \alpha_2) \right] L_1 \sin \alpha_1 + \\
& m_2 \left(L_1 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 + \frac{L_2}{2} \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 \right) L_1 \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 + \\
& m_1 \frac{L_1}{2} \dot{\alpha}_1 \left[\left(\dot{x} + \frac{L_1}{2} \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 \right) \sin \alpha_1 - \cos \alpha_1 \right] - m_2 L_1 \dot{\alpha}_1 \cdot \\
& \left[\left(\dot{x} + \frac{L_1}{2} \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 + \frac{L_2}{2} \dot{\alpha}_2 \cos \alpha_2 \right) \sin \alpha_1 - \left(L_1 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 + \frac{L_2}{2} \dot{\alpha}_2 \sin \alpha_2 \right) \cos \alpha_1 \right] + \\
& L_1 g \sin \alpha_1 \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) = 0.
\end{aligned}$$

Wyznaczamy równanie (8).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\alpha}_2} &= \frac{m_2 L_2}{2} \left(\dot{x} + L_1 \dot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{5}{6} L_2 \dot{\alpha}_2 \right), \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\alpha}_2} \right) &= \frac{m_2 L_2}{2} \left[\ddot{x} + L_1 (\ddot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)) + \frac{5}{6} L_2 \ddot{\alpha}_2 \right], \\
\frac{\partial E_k}{\partial \alpha_2} &= \frac{m_2 L_2}{2} [\dot{x} \sin \alpha_2 + L_1 \dot{\alpha}_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)], \\
\frac{\partial E_p}{\partial \alpha_2} &= \frac{m_2 g L_2}{2} \sin \alpha_2.
\end{aligned}$$

Zatem równanie (8) ma postać:

$$\ddot{x} + L_1 (\ddot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)) + \frac{5}{6} L_2 \ddot{\alpha}_2 - \dot{x} \sin \alpha_2 - L_1 \dot{\alpha}_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \sin \alpha_2 = 0.$$

2 Układ normalny równań różniczkowych rzędu pierwszego

2.1 Definicja 1:

Układem normalnym równań różniczkowych rzędu pierwszego nazywamy układ równań postaci (1)

$$(1) \quad \begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

gdzie $x_1, \dots, x_n$ są nieznanymi funkcjami zmiennej niezależnej $t \in I$, a $f_1, \dots, f_n$ są danymi funkcjami określonymi w $I \times U$, gdzie $I = (a, b)$, a i b mogą być nieskończonościami, $U \subset \mathbb{R}^n$.

2.2 Definicja 2:

Przez rozwiązanie układu równań różniczkowych (1) rozumiemy funkcje różniczkowalne $x_1, \dots, x_n$ spełniające dla każdego $t \in I$ układ równań (1).

2.3 Definicja 3:

Jeżeli $x_1, \dots, x_n$ są rozwiązaniem układu (1) to trajektorią rozwiązania nazywamy zbiór punktów w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ określony następująco:

$$\{(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad t \in I\}.$$

2.4 Definicja 4:

Problem początkowy (Cauchy'ego) dla układu (1) polega na znalezieniu w przedziale I rozwiązania $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ układu (1) spełniającego warunki początkowe

$$(2) \quad x_1(t_0) = x_{01}, \quad x_2(t_0) = x_{02}, \dots, \quad x_n(t_0) = x_{0n},$$

gdzie $x_{01}, \dots, x_{0n}$ są dane, a t_0 jest ustalonym punktem przedziału I .

2.5 Twierdzenie 1. O istnieniu i jednoznaczności

Jeżeli funkcje $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$, dla $i = 1, \dots, n$, są wraz z pochodnymi cząstkowymi $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, ($i, j = 1, \dots, n$) ciągłe w $I \times U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ i $(t_0, x_{01}, \dots, x_{0n}) \in I \times U$, to układ równań (1) z warunkami początkowymi (2) posiada dokładnie jedno rozwiązanie w pewnym otoczeniu punktu t_0 .

2.6 Przykład 1:

Pokazać, że układ równań

$$\begin{cases} x_1' = tx_1 + x_2^2 \\ x_2' = x_1 + \sin(x_2) + e^t \end{cases}$$

z warunkiem początkowym $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$ posiada w pewnym otoczeniu punktu $t_0 = 0$ dokładnie jedno rozwiązanie. Istotnie, funkcje

$$f_1(t, x_1, x_2) = tx_1 + x_2^2, \quad f_2(t, x_1, x_2) = x_1 + \sin(x_2) + e^t$$

są ciągłe w $\mathbb{R}^3$ ponadto ich pochodne

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = t, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 2x_2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \cos(x_2)$$

są również ciągłe w $\mathbb{R}^3$. Zatem, na mocy twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności, problem początkowy posiada dokładnie jedno rozwiązanie w pewnym otoczeniu punktu $t_0 = 0$.

2.7 Uwaga 1:

Każde równanie rzędu n

$$(3) \quad x^{(n)} = F(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

można przekształcić do układu postaci (1).

Istotnie, określmy następująco nowe zmienne

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \dots, x_n = x^{(n-1)}.$$

Wtedy równanie (3) można zapisać w postaci układu równań

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = F(t, x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

2.8 Przykład 2:

Przekształcić problem początkowy

$$(4) \quad \begin{cases} x''' = 2x'' + \frac{t}{x'} + x^2 + t^3 \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad x''(0) = -1 \end{cases}$$

do postaci (1), (2) Określmy nowe zmienne x_1, x_2, x_3 w następujący sposób:

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad x_3 = x''.$$

Stąd mamy, że

$$x'_1 = x' = x_2, \quad x'_2 = x'' = x_3, \quad x'_3 = x''' = 2x_3 + \frac{t}{x_2} + x_1^2 + t^3.$$

Zatem problem początkowy (4) można zapisać w postaci problemu początkowego dla układu:

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ x'_3 = 2x_3 + \frac{t}{x_2} + x_1^2 + t^3 \\ x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1, \quad x_3(0) = -1. \end{cases}$$

2.9 Przykład 3:

Przekształcić układ równań

$$\begin{cases} x'' + y' + x = t \\ y'' + y + x' = 1 \end{cases}$$

do postaci (1). Określmy nowe zmienne w następujący sposób

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = x', \quad x_4 = y'.$$

Wówczas

$$x'_1 = x_3, \quad x'_2 = x_4, \quad x'_3 = -x_1 - x_4 + t, \quad x'_4 = -x_2 - x_3 + 1.$$

Układ wyjściowy można zatem zapisać następująco w postaci układu

$$\begin{cases} x'_1 = x_3 \\ x'_2 = x_4 \\ x'_3 = -x_1 - x_4 + t \\ x'_4 = -x_2 - x_3 + 1. \end{cases}.$$

3 Układy równań różniczkowych liniowych rzędu pierwszego

3.1 Definicja 1:

Układem normalnym równań różniczkowych liniowych rzędu pierwszego nazywamy układ równań postaci (1)

$$(1) \quad \begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t) \end{cases}$$

gdzie $x_1, \dots, x_n$ są nieznanymi funkcjami zmiennej niezależnej $t \in I$, a współczynniki $a_{ij}(t)$ i funkcje $f_i(t)$ są danymi funkcjami określonymi w przedziale $I = (a, b)$, gdzie a i b mogą być nieskończonościami.

3.2 Definicja 2:

Jeżeli $f_i(t) = 0$, $i = 1, \dots, n$, $t \in I$, to układ (1) nazywamy **jednorodnym**.

3.3 Definicja 3:

Rozwiązaniem układu (1) nazywamy funkcje $x_1, \dots, x_n$ ciągłe i różniczkowalne w przedziale I , spełniające układ (1) dla każdego $t \in I$.

3.4 Definicja 4:

Warunkiem początkowym dla układu (1) nazywamy układ równości :

$$(2) \quad x_1(t_0) = x_{01}, \quad x_2(t_0) = x_{02}, \dots, \quad x_n(t_0) = x_{0n}$$

gdzie $x_{01}, \dots, x_{0n}$ są danymi stałymi, a t_0 jest ustalonym punktem przedziału I .

Zapis macierzowy układu (1). Wprowadzając następujące oznaczenia:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{bmatrix},$$

układ (1) można zapisać w postaci

$$(3) \quad x'(t) = A(t)x(t) + f(t),$$

a warunek początkowy (2)

$$(4) \quad x(t_0) = x_0.$$

3.5 Twierdzenie 1. O istnieniu i jednoznaczności.

Jeżeli $A(t)$, $f(t)$ są ciągłe w $I \times \mathbb{R}^n$, to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $x(t)$ układu (1) określone w całym przedziale I i spełniające warunek początkowy (2).

3.6 Uwaga 1:

Twierdzenie to jest szczególnym przypadkiem **2.5 twierdzenia 1** o istnieniu i jednoznaczności dla układów równań. Istotna różnica między twierdzeniami jest taka, że w twierdzeniu ogólniejszym rozwiązanie istnieje w pewnym otoczeniu punktu t_0 a w przypadku układu równań liniowych istnieje i jest określone na całym przedziale I .

Struktura zbioru rozwiązań układu jednorodnego:

$$(5) \quad x'(t) = A(t)x(t), \quad t \in I.$$

Niech

$$V = \{x(t) : x'(t) = A(t)x(t), \quad t \in I\}$$

będzie zbiorem wszystkich rozwiązań układu (5).

3.7 Twierdzenie 2:

TEZA: Zbiór wszystkich rozwiązań układu (5) jest przestrzeń wektorową n -wymiarową nad zbiorem liczb rzeczywistych.

DOWÓD: Niech

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{1n}(t) \end{bmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{bmatrix} x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{2n}(t) \end{bmatrix}$$

będą dowolnymi rozwiązaniami układu (5) i λ_1, λ_2 będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Korzystając z własności pochodnej dostajemy następującą tożsamość:

$$(\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t))' = \lambda_1 x_1'(t) + \lambda_2 x_2'(t) = A(t) (\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t))$$

więc $\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)$ jest rozwiązaniem układu (5). Zatem zbiór V jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$. Pokażemy teraz, że wymiar przestrzeni V jest n . Niech t_0 będzie dowolnym ustalonym punktem przedziału I . Definiujemy odwzorowanie liniowe L ,

$$L : V \ni x \rightarrow x(t_0) \in \mathbb{R}^n.$$

Pokażemy, że odwzorowanie L jest izomorfizmem. Istotnie

$$\ker L = \{x(t) \in V : x(t_0) = 0\} = \{0\}$$

wynika to z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań układów równań, ponieważ funkcja tożsamościowo równa zero jest rozwiązaniem układu (5) i spełnia warunek początkowy $x(t_0) = 0$. Zatem odwzorowanie L jest różnowartościowe. Z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności wynika, że dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}^n$ istnieje $x \in V$ takie, że $x(t_0) = x_0$. Stąd wynika, że L jest odwzorowaniem na zbiór i kończy to dowód, że L jest izomorfizmem. Ponieważ przestrzenie izomorficzne mają ten sam wymiar, więc $\dim V = \dim \mathbb{R}^n = n$.

3.8 Definicja 5:

Dowolną bazę $x_1(t), \dots, x_n(t)$ przestrzeni V będziemy nazywać **układem fundamentalnym** dla równania (5).

3.9 Uwaga 2:

Jeżeli $x(t)$ jest rozwiązaniem układu (5) i $x_1(t), \dots, x_n(t)$ jest układem fundamentalnym dla układu (5) to istnieją liczby rzeczywiste $c_1, \dots, c_n$ takie, że $x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t)$.

3.10 Uwaga 3:

Jeżeli funkcje

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{1n}(t) \end{bmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{bmatrix} x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{2n}(t) \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad x_n(t) = \begin{bmatrix} x_{n1}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

stanowią układ fundamentalny dla równania (5), to

$$\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ dla każdego } t \in I.$$

3.11 Definicja 6:

Jeżeli $x_1(t), \dots, x_n(t)$ jest układem fundamentalnym dla układu (5), to macierz

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

nazywamy **macierzą fundamentalną** i spełnia ona równanie macierzowe

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t).$$

Podamy teraz jak wyznacza się rozwiązanie układu niejednorodnego (3) gdy znamy już układ fundamentalny rozwiązań układu jednorodnego (5).

3.12 Twierdzenie 3:

TEZA: Niech $X(t)$ będzie macierzą fundamentalną układu jednorodnego (5) to rozwiązanie ogólne układu niejednorodnego (3) jest postaci

$$(6) \quad x(t) = X(t) \cdot C + X(t) \cdot \int X^{-1}(t) \cdot f(t) dt$$

gdzie $C = [c_1, \dots, c_n]^T$, $c_1, \dots, c_n$ - są dowolnymi stałymi i $X^{-1}(t)$ oznacza macierz odwrotną do macierzy $X(t)$. Natomiast rozwiązanie układu (3) spełniające warunek początkowy (4) jest postaci

$$(7) \quad x(t) = X(t) \cdot \left(X^{-1}(t_0) \cdot x_0 + \int_{t_0}^t X^{-1}(s) \cdot f(s) ds \right).$$

DOWÓD: Niech $X(t)$ będzie macierzą fundamentalną układu (5). Z uwagi 2 mamy, że dla dowolnego rozwiązania $x(t)$ układu (5) istnieje macierz C taka, że

$$x(t) = X(t) \cdot C.$$

Rozwiązania równania (3) szukamy metodą uzmienniania stałej C , to znaczy że C traktujemy jako funkcję zmiennej t

$$(8) \quad x(t) = X(t) \cdot C(t).$$

Różniczkując powyższą równość otrzymujemy

$$(9) \quad x'(t) = X'(t) \cdot C(t) + X(t) \cdot C'(t).$$

Podstawiając teraz (8) i (9) do równania (3) otrzymujemy

$$(10) \quad X'(t) \cdot C(t) + X(t) \cdot C'(t) = A(t) \cdot X(t) \cdot C(t) + f(t).$$

Ponieważ

$$X'(t) = A(t) \cdot X(t)$$

więc z (10) mamy, że

$$X(t) \cdot C'(t) = f(t).$$

Z uwagi3 wynika, że macierz $X(t)$ jest odwracalna dla każdego $t \in I$, więc z powyższej równości otrzymujemy

$$(11) \quad C'(t) = X^{-1}(t) \cdot f(t).$$

Całkując obustronnie powyższą równość ze względu na t dostajemy, że

$$C(t) = \int X^{-1}(t) \cdot f(t)dt + C, \quad \text{gdzie } C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Podstawiając prawą stronę powyższej równości do równania (8) otrzymamy równość (6). Jeżeli uwzględniamy warunek początkowy, to całkujemy obustronnie równanie (11) od t_0 do t i dostajemy

$$C(t) - C(t_0) = \int_{t_0}^t X^{-1}(s) \cdot f(s)ds.$$

Podstawiając wyliczone $C(t)$ do równania (8) otrzymamy

$$(12) \quad x(t) = X(t) \cdot C(t_0) + X(t) \cdot \int_{t_0}^t X^{-1}(s) \cdot f(s)ds.$$

Ponieważ $x_0 = x(t_0) = X(t_0) \cdot C(t_0)$,
więc

$$C(t_0) = X^{-1}(t_0) \cdot x_0.$$

Stąd i (12) dostajemy równość (7) i kończy to dowód twierdzenia.

4 Rozwiązywanie układów równań liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach, gdy wartości własne są rzeczywiste i jednokrotne

Rozważmy układ równań postaci

$$(1) \quad x'(t) = A \cdot x(t),$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Omówimy wyznaczanie układu fundamentalnego rozwiązań dla układu równań różniczkowych (1) gdy wartości własne macierzy A są rzeczywiste i jednokrotne. Rozwiązania układu (1) szukamy w postaci funkcji

$$x(t) = ve^{\lambda t}, \quad \text{gdzie} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Podstawiamy $x(t)$ i $x'(t) = \lambda ve^{\lambda t}$ do równania (1)

$$\lambda ve^{\lambda t} = A \cdot (ve^{\lambda t}) = e^{\lambda t} A \cdot v.$$

Dzielimy powyższą równość obu stron przez $e^{\lambda t}$

$$A \cdot v = \lambda v.$$

Stąd wynika, że λ jest wartością własną macierzy A a v - wektorem własnym odpowiadającym tej wartości własnej.

Z powyższych rozważań wynika, że chcąc wyznaczyć układ fundamentalny rozwiązań układu (1) należy w pierwszej kolejności wyznaczyć wartości własne macierzy A i odpowiadające im wektory własne. Wartości własne macierzy A są pierwiastkami wielomianu:

$$(2) \quad |A - \lambda I| = p_n \lambda^n + p_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + p_1 \lambda + p_0 = 0,$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową a $p_0, \dots, p_n$ - są to liczby rzeczywiste. Jeśli λ jest wartością własną macierzy A to przez

$$V_\lambda = \{x : (A - \lambda I)x = 0\}$$

oznaczać będziemy zbiór wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ .

4.1 Twierdzenie 1:

TEZA: Jeżeli $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są różnymi rzeczywistymi wartościami własnymi macierzy A i $v_1, \dots, v_n$ są odpowiednio odpowiadającymi im wektorami własnymi to funkcje

$$x_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, x_n(t) = v_n e^{\lambda_n t}$$

stanowią układ fundamentalny rozwiązań układu równań różniczkowych (1). Rozwiązanie ogólne układu (1) jest postaci

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t),$$

gdzie $c_1, \dots, c_n$ - są to dowolne stałe.

DOWÓD: Oznaczmy przez V zbiór wszystkich rozwiązań układu (1). Z twierdzenia 2 wiemy, że V - jest przestrzenią wektorową n - wymiarową. Z kursu algebry liniowej wiadomo, że wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne. Zatem wektory $v_1, \dots, v_n$ są liniowo niezależne a w konsekwencji funkcje $x_1(t), \dots, x_n(t)$ należące do przestrzeni V są też liniowo niezależne i stanowią bazę tej przestrzeni, czyli są układem fundamentalnym rozwiązań układu równań różniczkowych (1). Stąd wynika, że jeżeli $x(t)$ jest dowolnym rozwiązaniem układu (1) to istnieją stałe rzeczywiste $c_1, \dots, c_n$ takie, że

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t).$$

4.2 Przykład 1:

Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu (1) gdy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczamy wartości własne macierzy A

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1 - \lambda)((3 - \lambda)(4 - \lambda) - 2) = (1 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0 \end{aligned}$$

zatem wartościami własnymi są liczby $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$. Wyznaczymy teraz kolejno podprzestrzenie własne V_1 , V_2 i V_3 odpowiadające tym wartościom własnym.

Jeśli $\lambda_1 = 1$. Wtedy

$$V_1 = \{x : (A - I) \cdot x = 0, \} \text{ gdzie } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy układ równań: $(A - I) \cdot x = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -\frac{3}{2}x_3. \end{cases}$$

Zatem

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_3 \\ -1.5x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad i \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jeśli $\lambda_2 = 2$. Wtedy

$$V_2 = \{x : (A - 2I) \cdot x = 0.\}$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$(A - 2I) \cdot x = 0 :$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -x_1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3. \end{cases}$$

Zatem

$$V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad i \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jeśli $\lambda_3 = 5$. Wtedy

$$V_3 = \{x : (A - 5I) \cdot x = 0, \} \text{ gdzie } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A - 5I) \cdot x = 0$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -4x_1 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 2x_2. \end{cases}$$

Zatem

$$V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_2, \quad x_2 \in \mathbb{R} \right\} \quad i \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Stąd wynika, że funkcje

$$x_1(t) = v_1 e^t = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \\ 1 \end{bmatrix} e^t, \quad x_2(t) = v_2 e^{2t} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}, \quad x_3(t) = v_3 e^{5t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{5t}$$

stanowią układ fundamentalny rozwiązań dla układu (1) i rozwiązanie ogólne tego układu ma postać

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1.5 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{5t},$$

gdzie c_1, c_2, c_3 są to dowolne liczby rzeczywiste.

Wyznaczanie wartości własnych i wektorów własnych macierzy A za pomocą programu wolframalpha

<https://www.wolframalpha.com/input/?i=eigensystem+%5B%7B1%2C0%2C0%7D%2C%7B2%2C3%2C1%7D%2C%7B0%2C2%2C4%7D%5D>

Rozwiązanie układu (1) za pomocą programu wolframalpha

https://www.wolframalpha.com/input/?i=x1%27%3Dx1-x2%2B2*x3%2C+x2%27%3D-x1%2Bx2%2C+x3%27%3D-x1%2Bx3

5 Rozwiązywanie układów równań liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach, gdy wartości własne są jednokrotne, ale nie wszystkie rzeczywiste

Rozważmy układ równań różniczkowych postaci

$$(1) \quad x'(t) = A \cdot x(t),$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Omówimy wyznaczanie układu fundamentalnego dla układu (1) gdy wartości własne macierzy A są jednokrotne, ale nie wszystkie rzeczywiste.

5.1 Uwaga 1:

Niech

$$(2) \quad w(\lambda) = p_n \lambda^n + p_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + p_1 \lambda + p_0$$

będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Jeżeli $\lambda = \alpha + \beta i$ jest miejscem zerowym tego wielomianu to liczba sprzężona $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ jest również miejscem zerowym tego wielomianu. Istotnie, z własności sprzężenia dla liczb zespolonych mamy

$$0 = \overline{p_n \lambda^n + p_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + p_1 \lambda + p_0} = p_n \bar{\lambda}^n + p_{n-1} \bar{\lambda}^{n-1} + \cdots + p_1 \bar{\lambda} + p_0$$

więc $\bar{\lambda}$ jest mniejszym miejscem zerowym wielomianu (2)

Wartości własne macierzy A są miejscami zerowymi wielomianu:

$$|A - \lambda I| = p_n \lambda^n + p_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + p_1 \lambda + p_0 = 0$$

Z uwagi 1 wynika, że jeżeli λ jest zespoloną wartością własną macierzy A to $\bar{\lambda}$ jest też wartością własną macierzy A .

5.2 Uwaga 2:

Jeżeli λ jest zespoloną wartością własną macierzy A i v jest wektorem własnym odpowiadającym tej wartości własnej to $\bar{v}$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej sprzężonej $\bar{\lambda}$. Istotnie, z własności sprzężenia dla liczb zespolonych mamy

$$0 = \overline{(A - \lambda I) \cdot v} = \overline{(A - \lambda I)} \cdot \bar{v} = (A - \bar{\lambda} I) \cdot \bar{v}$$

więc $\bar{v}$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $\bar{\lambda}$.

Niech $\lambda = \alpha + \beta i$ będzie zespoloną wartością własną macierzy A a v wektorem własnym odpowiadającym tej wartości własnej.

Z uwagi 2 wynika, że funkcje

$$v e^{\lambda t}, \quad \bar{v} e^{\bar{\lambda} t}$$

są liniowo niezależnymi rozwiązaniami układu (1). Korzystając z zależności

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t + \beta ti} = e^{\alpha t} e^{\beta ti} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)),$$

funkcje

$$ve^{\lambda t}, \bar{v}e^{\bar{\lambda}t}$$

można zapisać następująco:

$$ve^{\lambda t} = (\Re(v) + i\Im(v))e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) = e^{\alpha t}[\Re(v) \cos(\beta t) - \Im(v) \sin(\beta t) + i(\Re(v) \sin(\beta t) + \Im(v) \cos(\beta t))],$$

$$\bar{v}e^{\bar{\lambda}t} = (\Re(v) - i\Im(v))e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)) = e^{\alpha t}[\Re(v) \cos(\beta t) - \Im(v) \sin(\beta t) - i(\Re(v) \sin(\beta t) + \Im(v) \cos(\beta t))]$$

gdzie $\Re$ oznacza część rzeczywistą a $\Im$ część urojoną. Ponieważ zbiór rozwiązań układu równań różniczkowych (1) jest przestrzenią wektorową to następujące funkcje,

$$(3) \quad x_1(t) = \frac{1}{2}(ve^{\lambda t} + \bar{v}e^{\bar{\lambda}t}) = \Re(ve^{\lambda t}) = e^{\alpha t}(\Re(v) \cos(\beta t) - \Im(v) \sin(\beta t)),$$

$$(4) \quad x_2(t) = \frac{1}{2i}(ve^{\lambda t} - \bar{v}e^{\bar{\lambda}t}) = \Im(ve^{\lambda t}) = e^{\alpha t}(\Re(v) \sin(\beta t) + \Im(v) \cos(\beta t))$$

są liniowo niezależnymi rozwiązaniami tego układu.

Stąd wynika, że dla wartości własnych zespolonych λ i $\bar{\lambda}$ wystarczy wyznaczyć tylko wektor własny v dla wartości własnej λ .

5.3 Przykład 1:

Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych (1) gdy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczamy wartości własne macierzy A

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1 - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)[(1 - \lambda)^2 + 1] = 0$$

więc $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + i$, $\lambda_3 = 1 - i$ są jednokrotnymi wartościami własnymi macierzy A . Wyznamy teraz kolejno podprzestrzenie własne V_1 i V_2 odpowiadające wartościom własnym λ_1 , λ_2 .

Jeśli $\lambda_1 = 1$. Wtedy

$$V_1 = \{x : (A - I) \cdot x = 0, \} \text{ gdzie } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy układ równań

$$(A - I) \cdot x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 2x_3 \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Zatem

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Niech

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

wtedy funkcja

$$x_1(t) = v_1 e^t = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t,$$

jest rozwiązaniem układu (1).

Jeśli $\lambda_2 = 1 + i$. Wtedy

$$V_2 = \{x : (A - (1 + i)I) \cdot x = 0\}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A - (1 + i)I) \cdot x = 0$:

$$\begin{bmatrix} -i & -1 & 2 \\ -1 & -i & 0 \\ -1 & 0 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -ix_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - ix_2 = 0 \\ -x_1 - ix_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -ix_3 \\ x_2 = x_3. \end{cases}$$

Zatem

$$V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -ix_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad i \quad v_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} i.$$

Ponieważ

$$\Re(v_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ i } \quad \Im(v_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

to z zależności (3) i (4) wynika, że funkcje

$$x_2(t) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t \right) e^t,$$

$$x_3(t) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t \right) e^t.$$

są liniowo niezależnymi rozwiązaniami rozpatrywanego układu, odpowiadające wartościom własnym λ_2 i λ_3

Rozwiązanie ogólne układu (1) ma postać:

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t \right) e^t + c_3 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t \right) e^t$$

gdzie c_1 , c_2 i c_3 są to dowolne stałe rzeczywiste.

Wyznaczanie wartości własnych i wektorów własnych macierzy A za pomocą programu wolframalpha

<https://www.wolframalpha.com/input/?i=eigensystem%5B%7B1%2C-1%2C2%7D%2C%7B-1%2C1%2C0%7D%2C%7B-1%2C0%2C1%7D%5D>

Rozwiązanie układu (1) za pomocą programu wolframalpha

https://www.wolframalpha.com/input/?i=x1%27%3Dx1%2C+x2%27%3D2*x1%2B3*x2%2Bx3%2C+x3%27%3D2*x2%2B4*x3

6 Rozwiązywanie układów równań liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach, gdy macierz układu jest diagonalizowalna

Rozważmy układ równań postaci

$$(1) \quad x'(t) = A \cdot x(t),$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Z kursu algebry liniowej wiemy, że macierz A jest diagonalizowalna jeżeli dla każdej wartości własnej wymiar podprzestrzeni własnej odpowiadającej tej wartości jest równy jej krotności. Niech λ będzie wartością własną macierzy A o krotności k_λ i wymiar podprzestrzeni własnej

$$V_\lambda = \{x : (A - \lambda I) \cdot x = 0\}$$

jest równy k_λ .

Jeżeli układ wektorów $\{v_1, \dots, v_k\}$ jest bazą przestrzeni V_λ to następujące funkcje

$$x_1(t) = v_1 e^{\lambda t}, \dots, x_k(t) = v_k e^{\lambda t}$$

są liniowo niezależnymi rozwiązaniami układu (1).

6.1 Uwaga 1:

Przyjmujemy następujące oznaczenia dotyczące operacji na macierzach : zapis $a \cdot w_i + b \cdot w_j$ oznacza, że mnożymy wiersz i -ty przez a i wiersz j -ty przez b i wynik zapisujemy w wierszu j -tym. Analogicznie w przypadku kolumn zapis $a \cdot k_i + b \cdot k_j$ oznacza, że mnożymy kolumnę i -tą przez a i kolumnę j -tą przez b i wynik zapisujemy w kolumnie j -tej.

6.2 Przykład 1:

Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu (1), gdy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczamy wartości własne macierzy A :

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{w_1 \leftarrow w_2}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3+\lambda & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{k_1 \leftarrow k_2}{=} \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)^2(\lambda+3) = 0, \end{aligned}$$

$\lambda_1 = -3$ jest wartością własną o krotności jeden i $\lambda_2 = 3$ jest wartością własną o krotności dwa. Wyznamy teraz kolejno podprzestrzenie własne V_1 i V_2 odpowiadające wartościom własnym λ_1 i λ_2 .

Jeśli $\lambda_1 = -3$. Wtedy

$$V_1 = \{x : (A + 3I) \cdot x = 0, \} \text{ gdzie } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy układ równań

$$(A + 3I) \cdot x = 0 :$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{w_3+w_2} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3. \end{cases}$$

Zatem

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\} \quad i \quad v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Funkcja $x_1(t) = v_1 e^{-3t} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}$

jest rozwiązaniem układu (1) odpowiadającym wartości własnej λ_1 .

Jeśli $\lambda_2 = 3$. Wtedy

$$V_2 = \{x : (A - 3I) \cdot x = 0\}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A - 3I) \cdot x = 0 :$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \iff x_1 = -x_2 + x_3.$$

Zatem

$$V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, \quad x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Przestrzeń V_2 jest generowana przez wektory

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

które są liniowo niezależne. Więc wymiar przestrzeni V_2 jest równy krotności wartości własnej λ_2 .

Stąd wynika, że następujące funkcje

$$x_2(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t}, \quad x_3(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

są liniowo niezależnymi rozwiązaniami układu (1) odpowiadającymi wartości własnej λ_2 .

Fundamentalnym zbiorem rozwiązań dla układu (1) są funkcje $\{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\}$. Rozwiązanie ogólne układu (1) ma postać

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

gdzie c_1, c_2, c_3 są to dowolne liczby rzeczywiste.

Wyznaczanie wartości własnych i wektorów własnych macierzy A za pomocą programu wolframalpha

<https://www.wolframalpha.com/input/?i=eigensystem%5B%7B1%2C-2%2C2%7D%2C%7B-2%2C1%2C2%7D%2C%7B2%2C2%2C1%7D%5D>

Rozwiązanie układu (1) za pomocą programu wolframalpha

https://www.wolframalpha.com/input/?i=x1%27%28t%29%3Dx1-2*x2%2B2*x3%2C+x2%27%3D-2*x1%2Bx2%2B2*x3%2C+x3%27%3D2*x1%2B2*x2%2Bx3

7 Rozwiązywanie układów równań liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach, gdy macierz układu nie jest diagonalizowalna

Rozważmy układ równań postaci

$$(1) \quad x'(t) = A \cdot x(t)$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Z algebry liniowej wiadomo, że macierz nie jest diagonalizowalna, jeżeli istnieje wartość własna, której krotność jest większa niż odpowiadający jej wymiar podprzestrzeni własnej. Niech λ będzie wartością własną macierzy A o krotności $k \geq 1$ i wymiar podprzestrzeni własnej

$$V_\lambda^{(0)} = \{x : (A - \lambda I)x = 0\}$$

jest mniejszy niż k .

Na początek wprowadzimy pewne oznaczenia:

$$V_\lambda^{(i)} = \{x : (A - \lambda I)^{i+1}x = 0\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Zbiory $V_\lambda^{(i)}$ $i = 1, 2, \dots$ - są podprzestrzeniami wektorowymi przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i będziemy nazywać je podprzestrzeniami wektorów głównych rzędu i . Podprzestrzenie wektorów głównych dla wartości własnej λ tworzą ciąg wstępujący

$$V_\lambda^{(0)} \subset V_\lambda^{(1)} \subset V_\lambda^{(2)} \subset \dots \subset V_\lambda^{(m)}.$$

Dokładniej mówiąc, istnieje liczba naturalna m taka, że

$$V_\lambda^{(0)} \subsetneq V_\lambda^{(1)} \subsetneq V_\lambda^{(2)} \subsetneq \dots \subsetneq V_\lambda^{(m)}, \quad \dim V_\lambda^{(m)} = k \quad \text{ i } \quad V_\lambda^{(m)} = V_\lambda^{(l)} \quad \text{ dla } \quad m \leq l.$$

7.1 Twierdzenie 1:

ZAŁOŻENIA: Niech $v^{(m)} \in V_\lambda^{(m)} \setminus V_\lambda^{(m-1)}$ i wektory $v^{(m-1)}, v^{(m-2)}, \dots, v^{(1)}, v^{(0)}$ będą określone następująco:

$$(2) \quad \begin{cases} v^{(m-1)} := (A - \lambda I)v^{(m)} \\ v^{(m-2)} := (A - \lambda I)v^{(m-1)} \\ \vdots \\ v^{(1)} := (A - \lambda I)v^{(2)} \\ v^{(0)} := (A - \lambda I)v^{(1)} \end{cases}$$

TEZA:

1. $v^{(0)} \in V_\lambda^{(0)} \setminus \{0\}$ i $v^{(j)} \in V_\lambda^{(j)} \setminus V_\lambda^{(j-1)}$, gdzie $j = 1, \dots, m$.
2. Wektory $v^{(0)}, v^{(1)}, \dots, v^{(m)}$ - są liniowo niezależne.

7.2 Twierdzenie 2:

Jeżeli wektory $v^{(0)}, v^{(1)}, \dots, v^{(m)}$ są określone zależnością (2) to następujące funkcje są liniowo niezależnymi rozwiązaniami układu (1).

$$x_1(t) = v^{(0)}e^{\lambda t}, \quad x_2(t) = (v^{(1)} + tv^{(0)})e^{\lambda t}, \quad x_3(t) = (v^{(2)} + tv^{(1)} + \frac{t^2}{2}v^{(0)})e^{\lambda t}, \dots, \\ x_{m+1}(t) = \left(v^{(m)} + tv^{(m-1)} + \frac{t^2}{2}v^{(m-2)} + \dots + \frac{t^{(m-1)}}{(m-1)!}v^{(1)} + \frac{t^m}{m!}v^{(0)} \right) e^{\lambda t}.$$

8 Przykłady rozwiązywania układów równań liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach, gdy macierz układu nie jest diagonalizowalna

Rozważmy układ równań postaci

$$(1) \quad x'(t) = A \cdot x(t)$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

8.1 Przykład 1:

Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu (1) gdy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczamy wartości własne macierzy A :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{-w_2+w_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{k_1+k_2}{=} \\ \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -2 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0$$

zatem $\lambda = 1$ jest 3-krotnym pierwiastkiem. Wyznamy teraz podprzestrzeń własną odpowiadającą wartości własnej $\lambda = 1$

$$V^{(0)} = \{x : (A - I) \cdot x = 0, \} \text{ gdzie } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A - I) \cdot x = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \iff x_3 = -x_1 - x_2.$$

Zatem

$$V^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} x_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wymiar przestrzeni $V^{(0)}$ wynosi 2 i jest mniejszy od krotności wartości własnej. Musimy więc wyznaczyć podprzestrzeń główną rzędu pierwszego:

$$V^{(1)} = \{x : (A - I)^2 \cdot x = 0\}.$$

Ponieważ

$$(A - I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

więc $V^{(1)} = \mathbb{R}^3$.

Bazę w $V^{(1)}$ wyznaczamy następująco: bierzemy dowolny wektor $v_1^{(1)} \in V^{(1)} \setminus V^{(0)}$. Niech

$$v_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

wyznamy teraz wektor własny $v_1^{(0)}$ z zależności 2 w twierdzeniu 1 :

$$v_1^{(0)} = (A - I) \cdot v_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Należy teraz do wektorów $v_1^{(0)}, v_1^{(1)}$ dobrać wektor $v_0^{(0)} \in V^{(0)}$, tak by wektory $v_0^{(0)}, v_1^{(0)}, v_1^{(1)}$ były liniowo niezależne. Niech

$$v_0^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

wektory $v_0^{(0)}, v_1^{(0)}, v_1^{(1)}$ są liniowo niezależne, bo wyznacznik którego kolumnami są te wektory

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

jest różny od zera. Stąd wynika, że układ fundamentalny rozwiązań układu (1) jest następujący:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v_0^{(0)} e^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^t, \quad x_2(t) = v_1^{(0)} e^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^t \\ x_3(t) &= (v_1^{(1)} + t v_1^{(0)}) e^t = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) e^t. \end{aligned}$$

Rozwiązanie ogólne układu (1) ma postać

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^t + c_3 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) e^t$$

gdzie c_1, c_2, c_3 są to dowolne stałe.

Wyznaczanie wartości własnych i wektorów własnych i głównych dla macierzy A za pomocą programu wolframalpha

<https://www.wolframalpha.com/input/?i=eigensystem%5B%7B2%2C1%2C1%7D%2C%7B1%2C2%2C1%7D%2C%7B-2%2C-2%2C-1%7D%5D>

Program wyznacza wartość własną $\lambda = 1$ o krotności 3 i wartości własne i główne:

$$v_0^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie układu (1) za pomocą programu wolframalpha

https://www.wolframalpha.com/input/?i=x1%27%28t%29%3D2*x1%2Bx2%2Bx3%2C+x2%27%3Dx1%2B2*x2%2Bx3%2C++x3%27%3D-2*x1-2*x2-x3

8.2 Przykład 2:

Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu (1) gdy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczamy wartości własne macierzy A :

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3(1-\lambda)^2 = (1-\lambda)^5 = 0 \end{aligned}$$

więc $\lambda = 1$ jest wartością własną o krotności pięć. Wyznamy teraz podprzestrzeń własną odpowiadającą wartości własnej $\lambda = 1$

$$V^{(0)} = \{x : (A - I) \cdot x = 0\}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A - I) \cdot x = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_4 + x_5 = 0 \\ -4x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_5 = -2x_4 \end{cases}.$$

Zatem

$$V^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \\ -2x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} x_4, \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wymiar przestrzeni $V^{(0)}$ wynosi **2** i jest mniejszy od krotności wartości własnej, która wynosi **5**. Musimy wyznaczyć podprzestrzeń główną, której wymiar będzie wynosił **5**.

Wyznaczamy podprzestrzeń główną rzędu pierwszego

$$V^{(1)} = \{x : (A - I)^2 \cdot x = 0\}.$$

Ponieważ

$$(A - I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

więc

$$(A - I)^2 \cdot x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x_1 = 0 \text{ i } x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}.$$

Stąd wynika, że przestrzeń główną rzędu pierwszego ma postać:

$$V^{(1)} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_5, \quad x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right).$$

Ponieważ wymiar podprzestrzeni $V^{(1)}$ jest równy 4 i jest mniejszy niż krotność wartości własnej, więc musimy wyznaczyć podprzestrzeń wektorów głównych rzędu drugiego:

$$V^{(2)} = \{x : (A - I)^3 \cdot x = 0\}.$$

Ponieważ $(A - I)^3 = 0$ więc $V^{(2)} = \mathbb{R}^5$ i $\dim V^{(2)} = 5$. Bazę w przestrzeni $V^{(2)}$ wyznaczamy następująco:

1. Ponieważ $\dim V^{(2)} - \dim V^{(1)} = 5 - 4 = 1$ więc ze zbioru $V^{(2)} \setminus V^{(1)}$ bierzemy dowolny wektor $v_1^{(2)}$. Następnie wyznaczamy wektor główny rzędu pierwszego i wektor własny

$$V^{(1)} \setminus V^{(0)} \ni v_1^{(1)} := (A - I) \cdot v_1^{(2)}, \quad V^{(0)} \ni v_1^{(0)} := (A - I) \cdot v_1^{(1)}.$$

Oczywiście tak określone wektory $v_1^{(0)}$, $v_1^{(1)}$, $v_1^{(2)}$ są liniowo niezależne. Przyjmując:

$$v_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ to } v_1^{(1)} = (A - I) \cdot v_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ i } v_1^{(0)} = (A - I) \cdot v_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Ponieważ $\dim V^{(1)} - \dim V^{(0)} = 4 - 2 = 2$ więc ze zbioru $V^{(1)} \setminus V^{(0)}$ biorę dowolny wektor $v_2^{(1)}$ taki, że dla dowolnych liczb α_1, α_2 , nierównych jednocześnie zero, zachodzi warunek: $\alpha_1 v_1^{(1)} + \alpha_2 v_2^{(1)} \in V^{(1)} \setminus V^{(0)}$. Tak określone wektory $v_1^{(0)}, v_1^{(1)}, v_1^{(2)}, v_2^{(0)}, v_2^{(1)}$ są liniowo niezależne i stanowią bazę przestrzeni $V^{(2)}$.

$$\text{Gdy } v_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ to } v_2^{(0)} = (A - I) \cdot v_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Z **7.2 Twierdzenia 2** wynika, że układ fundamentalny rozwiązań układu (1) jest następujący:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v_1^{(0)} e^t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^t, \quad x_2(t) = (v_1^{(1)} + t v_1^{(0)}) e^t = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^t \\ x_3(t) &= (v_1^{(2)} + t v_1^{(1)} + \frac{1}{2} t^2 v_1^{(0)}) e^t = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} t^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^t \\ x_4(t) &= v_2^{(0)} e^t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^t, \quad x_5(t) = (v_2^{(1)} + t v_2^{(0)}) e^t = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) e^t. \end{aligned}$$

Zatem rozwiązanie ogólne układu (1) ma postać

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t) + c_4 x_4(t) + c_5 x_5(t)$$

gdzie c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 dowolne stałe.

Rozwiązanie układu (1) za pomocą programu wolframalpha

https://www.wolframalpha.com/input/?i=x1%27%28t%29%3Dx1%2C+x2%27%3Dx1%2Bx2%2C++x3%27%3Dx1%2Bx2%2Bx3%2C+x4%27%3D3*x4%2Bx5%2C+x5%27%3D-4*x4%2Bx5

8.3 Zadanie 1:

Treść zadania: Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu (1), gdy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie: Wyznaczamy wartości własne macierzy A :

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= (3-\lambda)(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ (3-\lambda)(1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)^3(3-\lambda)^2 = 0 \end{aligned}$$

zatem mamy dwie wartości własne $\lambda_1 = 1$ o krotności 3 i $\lambda_2 = 3$ o krotności 2.

Wyznamy podprzestrzeń własną dla wartości własnej $\lambda_1 = 1$.

$$V_1^{(0)} = \{x : (A - I) \cdot x = 0, \}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A - I) \cdot x = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 4x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ x_1 - 4x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} .$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_5 = -x_3 - x_4 \end{cases} \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

Zatem

$$V_1^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \\ -x_3 - x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} x_4, \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Wymiar przestrzeni $V_1^{(0)}$ wynosi **2** i jest mniejszy od krotności wartości własnej. Musimy więc wyznaczyć podprzestrzeń główną rzędu pierwszego. Wyznaczamy podprzestrzeń główną rzędu pierwszego dla λ_1

$$V_1^{(1)} = \{x : (A - I)^2 \cdot x = 0\}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A - I)^2 \cdot x = 0$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 8x_2 = 0 \\ 4x_2 = 0 \\ -4x_2 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = -\frac{2}{5}(x_3 + x_4 + x_5) \end{cases} , \quad x_3, x_4, x_5 - \text{dowolne liczby rzeczywiste.}$$

Zatem

$$V_1^{(1)} = \left(\begin{bmatrix} -\frac{2}{5}(x_3 + x_4 + x_5) \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_5, \quad x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right)$$

a więc wymiar podprzestrzeni $V_1^{(1)}$ wynosi 3 i jest równy krotności wartości własnej λ_1 .

Bierzemy dowolny wektor

$$v_1^{(1)} \in V_1^{(1)} \setminus V_1^{(0)}.$$

Jeżeli

$$v_1^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

to odpowiadający jemu wektor własny $v_1^{(0)}$ wyznaczamy z zależność:

$$v_1^{(0)} = (A - I) \cdot v_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Do wektorów $v_1^{(0)}$, $v_1^{(1)}$ należy teraz dobrać wektor $v_0^{(0)} \in V_1^{(0)}$ tak, by wektory $v_0^{(0)}$, $v_1^{(0)}$, $v_1^{(1)}$ były liniowo niezależne.

Jeśli

$$v_0^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

to łatwo sprawdzić, że wektory $v_0^{(0)}$, $v_1^{(0)}$, $v_1^{(1)}$ są liniowo niezależne. Z Twierdzenia 2 wynika, że natępujące funkcje są liniowo niezależnymi rozwiązaniami układu (1):

$$x_1(t) = v_0 e^t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t, \quad x_2(t) = v_1 e^t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} e^t$$

$$x_3(t) = (v_1^{(1)} + t v_1^{(0)}) e^t = \left(\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \right) e^t.$$

Wyznamy teraz podprzestrzeń własną dla wartości własnej $\lambda_2 = 3$:

$$V_2^{(0)} = \{x : (A - 3I) \cdot x = 0, \}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A - 3I) \cdot x = 0$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

stosując metodę Gaussa

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[3w_1+w_3]{w_1+w_2, w_1+w_4} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[2w_2+w_4]{\frac{5}{2}w_2+w_3} \\ & \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3w_3+4w_4} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -7 & | & 0 \end{bmatrix} \iff \\ & \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 7x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = -\frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_5 \\ x_4 = x_5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = x_5 \end{cases}. \end{aligned}$$

Zatem

$$V_2^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_5, \quad x_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wymiar przestrzeni $V_2^{(0)}$ wynosi 1 i jest mniejszy niż krotność wartości własnej λ_2 . Wyznamy teraz podprzestrzeń wektorów głównych rzędu pierwszego

$$V_2^{(1)} = \{x : (A - 3I)^2 \cdot x = 0\}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A - 3I)^2 \cdot x = 0$.

$$\begin{bmatrix} 4 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 4x_1 - 8x_2 = 0 \\ -4x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 0 \\ -7x_1 + 11x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ -7x_1 + 11x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy powyższy układ, stosując metodę Gaussa

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ -7 & 11 & -2 & 2 & -2 & | & 0 \\ 1 & -3 & -2 & -2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} w_1+w_2 \\ 7w_1+w_3 \\ w_1+w_4 \end{smallmatrix}]{\iff} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} 3w_2+w_3 \\ w_2+w_4 \end{smallmatrix}]{\iff}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} w_3+w_4 \end{smallmatrix}]{\iff} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2x_2 = 4x_4 - 4x_5 \\ x_2 = -x_3 = 2x_4 - 2x_5 \\ x_3 = -2x_4 + 2x_5 \end{cases}, \quad x_4, x_5 \in \mathbb{R}.$$

Zatem

$$V_2^{(1)} = \left\{ \begin{bmatrix} 4x_4 - 4x_5 \\ 2x_4 - 2x_5 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_4 + \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_5, \quad x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wymiar przestrzeni $V_2^{(1)}$ wynosi 2 i jest równy krotności wartości własnej λ_2 . Wybieramy dowolny wektor $v_2^{(1)} \in V_2^{(1)} \setminus V_2$. Jeżeli

$$v_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

to wyznaczamy teraz wektor własny $v_2^{(0)}$ z zależności:

$$v_2^{(0)} = (A - 3I) \cdot v_2^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Następujące funkcje są liniowo niezależnymi rozwiązaniami układu (1):

$$x_4(t) = v_2 e^{3t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} e^{3t}, \quad x_5(t) = (v_2^{(1)} + t v_3) e^{3t} = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} \right) e^{3t}.$$

Funkcje $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$, $x_5(t)$ są liniowo niezależne i stanowią układ fundamentalny układu (1). Zatem rozwiązanie ogólne układu (1) ma postaci

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t) + c_4 x_4(t) + c_5 x_5(t)$$

gdzie $c_1, \dots, c_5$ dowolne stałe.

9 Macierz wykładnicza i jej własności

Przez $M(n \times n, \mathbb{C})$ będziemy oznaczać zbiór macierzy o wymiarach $n \times n$ i wartościach zespolonych.

9.1 Definicja 1:

Normę w przestrzeni $M(n \times n, \mathbb{C})$ określamy następująco:

$$\|A\| = \max\{|a_{ij}|, \quad i, j = 1, \dots, n\}.$$

Łatwo zauważyć, że zachodzi nierówność $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.

Dla $t \in \mathbb{R}$ definiujemy ciąg macierzy $\{S_k(t)\}$

$$S_k(t) = \sum_{i=0}^k \frac{t^i}{i!} A^i.$$

Elementy macierzy $S_k(t)$ będziemy oznaczać $b_{ij}^{(k)}(t)$

$$S_k(t) = \begin{bmatrix} b_{11}^{(k)}(t) & \dots & b_{1n}^{(k)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}^{(k)}(t) & \dots & b_{nn}^{(k)}(t) \end{bmatrix}.$$

9.2 Uwaga 1:

Dla dowolnego ustalonego t ciąg $\{S_k(t)\}$ jest ciągiem Cauchy'ego to znaczy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje N takie, że dla $k, m \geq N$ zachodzi nierówność

$$(1) \quad \|S_m(t) - S_k(t)\| \leq \varepsilon.$$

Istotnie dla m, k mamy

$$(2) \quad \|S_m(t) - S_k(t)\| = \left\| \sum_{i=k+1}^m \frac{t^i}{i!} A^i \right\| \leq \sum_{i=k+1}^m \frac{|t|^i}{i!} \|A\|^i.$$

Z kryterium zbieżności d'Alemberta wynika, że szereg liczbowy

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|t|^i}{i!} \|A\|^i$$

jest zbieżny.

Zatem istnieje N , że dla $k \geq N$ zachodzi nierówność:

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|t|^i}{i!} \|A\|^i < \varepsilon.$$

Stąd i z (2) wynika (1) co kończy dowód uwagi 1.

Ponieważ dla każdego $i, j = 1, \dots, n$ mamy nierówność

$$|b_{ij}^{(m)}(t) - b_{ij}^{(k)}(t)| \leq \|S_m(t) - S_k(t)\|,$$

więc z uwagi 1 wynika, że ciąg $\{b_{ij}^{(k)}(t)\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Zatem istnieje granica tego ciągu

$$b_{ij}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} b_{ij}^{(k)}(t).$$

9.3 Definicja 2:

Macierz **wykładniczą** e^{tA} definiujemy jako granicę ciągu macierzy $\{S_k(t)\}$:

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & \dots & b_{nn}(t) \end{bmatrix} = \lim_{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} b_{11}^{(k)}(t) & \dots & b_{1n}^{(k)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}^{(k)}(t) & \dots & b_{nn}^{(k)}(t) \end{bmatrix} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} A^i.$$

9.4 Uwaga 2:

$$(3) \quad \frac{d}{dt} (e^{tA}) = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

Istotnie, ponieważ szereg

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} A^i$$

jest zbieżny niemal jednostajnie w $\mathbb{R}$, więc możemy różniczkować go wyraz po wyrazie. Zatem mamy, że

$$\frac{d}{dt} (e^{tA}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{t^i}{i!} A^i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} A^i = A \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} A^{i-1} = Ae^{tA}.$$

Zauważmy ponadto, że zachodzi równość $Ae^{tA} = e^{tA}A$.

9.5 Uwaga 3:

Dla dowolnej macierzy $M(n \times n, \mathbb{C})$ i dowolnych liczb $s, t \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$(4) \quad e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}.$$

Istotnie, ze wzoru na pochodną iloczynu i uwagi 2 mamy:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{(s+t)A}e^{-tA}) &= \frac{d}{dt} (e^{(s+t)A})e^{-tA} + e^{(s+t)A} \frac{d}{dt} (e^{-tA}) = \\ &= e^{(s+t)A}Ae^{-tA} - e^{(s+t)A}Ae^{-tA} = 0. \end{aligned}$$

Zatem wartość iloczynu $e^{(s+t)A}e^{-tA}$ nie zależy od t i jest równa wartości dla $t = 0$

$$(5) \quad e^{(s+t)A}e^{-tA} = e^{(s+0)A}e^{-0A} = e^{sA}I = e^{sA}, \quad \text{bo } e^0 = I.$$

Stąd dla $s = 0$ mamy $e^{tA}e^{-tA} = I$,
więc e^{-tA} jest macierzą odwrotną do macierzy e^{tA}

$$e^{-tA} = (e^{tA})^{-1}.$$

Mnożąc obie strony równości (4) przez e^{tA} , otrzymujemy równość (3).

9.6 Uwaga 4:

Dla dowolnych macierzy $A, B \in M(n \times n, \mathbb{C})$: jeżeli $AB = BA$, to

$$e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}.$$

Istotnie z uwagi 2 mamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(e^{t(A+B)} e^{-tB} e^{-tA} \right) = \\ e^{t(A+B)} (A+B) e^{-tB} e^{-tA} - e^{t(A+B)} B e^{-tB} e^{-tA} - e^{t(A+B)} e^{-tB} A e^{-tA}. \end{aligned}$$

Ponieważ $AB = BA$, to $AB^i = B^i A$, dla $i = 1, \dots, n$, więc

$$e^{-tB} A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i}{i!} B^i A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i}{i!} A B^i = A \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i}{i!} B^i = A e^{-tB}.$$

Zatem

$$\frac{d}{dt} \left(e^{t(A+B)} e^{-tB} e^{-tA} \right) = 0,$$

czyli $e^{t(A+B)} e^{-tB} e^{-tA}$ nie zależy od t , więc jest równe wartości dla $t = 0$

$$e^{t(A+B)} e^{-tB} e^{-tA} = I.$$

Mnożąc obustronnie powyższą równość kolejno przez e^{tA} i e^{tB} otrzymamy zależność (6)

9.7 Uwaga 5:

Macierz e^{tA} jest macierzą fundamentalną układu równań

$$(8) \quad x'(t) = A \cdot x(t),$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{ i } \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Wynika to bezpośrednio z uwagi 2.

Zatem rozwiązanie ogólne układu (7) przy użyciu macierzy e^{tA} można zapisać następująco:

$$(9) \quad x(t) = e^{tA} \cdot C \quad \text{ gdzie } \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Natomiast rozwiązanie równania (7) z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$ gdzie

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{bmatrix}$$

można zapisać następująco:

$$x(t) = e^{tA} \cdot e^{-t_0A} \cdot x_0 = e^{(t-t_0)A} \cdot x_0.$$

10 Wyznaczanie macierzy wykładniczej

Do wyznaczania macierzy wykładniczej e^{tA} wykorzystamy następujące twierdzenie:

10.1 Twierdzenie 1:

ZAŁOŻENIA: Niech A będzie dowolną rzeczywistą lub zespoloną macierzą kwadratową wymiaru $n \times n$.

TEZA: Wtedy istnieje nieosobliwa macierz P , taka że $A = PJP^{-1}$, gdzie J jest tak zwaną **macierzą Jordana** macierzy A . Macierz Jordana ma postać:

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & J_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_k \end{bmatrix}.$$

elementy J_i macierzy J są zwane **kłatkami Jordana**.

Omówimy teraz jak wyznacza się klatki Jordana i macierz nieosobliwą P .

Niech A będzie rzeczywistą macierzą kwadratową wymiaru $n \times n$, a

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k, \quad k \leq n$$

będą wartościami własnymi macierzy A . Niech

$$V_i^{(0)} = \{x : (A - \lambda_i I) \cdot x = 0\},$$

będzie podprzestrzenią własną odpowiadającą wartości własnej λ_i . Rozważymy następujące przypadki.

1. Wymiar przestrzeni $V_i^{(0)}$ jest równy krotności wartości własnej λ_i .
Niech m - oznacza krotność wartości własnej λ_i i niech układ wektorów

$$\{v_{i_1}^{(0)}, \dots, v_{i_m}^{(0)}\}$$

będzie bazą przestrzeni $V_i^{(0)}$. Każdemu wektorowi $v_{i_j}^{(0)}$ odpowiada pojedyncza klatka Jordana, którą będziemy oznaczać $J_{i_j} = [\lambda_i]$. W tym przypadku mamy m jednakowych pojedynczych klatek Jordana.

2. Wymiar przestrzeni $V_i^{(0)}$ jest mniejszy od krotności wartości własnej λ_i .
Jeżeli m - jest krotnością wartości własnej λ_i a r - wymiarem przestrzeni własnej $V_i^{(0)}$, wtedy mamy m wektorów $\{v_{i_1}^{(0)}, \dots, v_{i_m}^{(0)}\}$, z których tylko pierwszych r stanowi bazę przestrzeni $V_i^{(0)}$ a pozostałe $m - r$ wektorów są wektorami głównymi odpowiednich rzędów związanymi niekoniecznie ze wszystkimi wektorami własnymi $\{v_{i_1}^{(0)}, \dots, v_{i_r}^{(0)}\}$. Każdemu wektorowi własnemu $v_{i_1}^{(0)}, \dots, v_{i_r}^{(0)}$ odpowiada odpowiednio klatka Jordana $J_{i_1}, \dots, J_{i_r}$.
Jeżeli wektorowi $v_{i_j}^{(0)}$ - nie odpowiada żaden wektor główny, to klatka Jordana odpowiadająca wektorowi $v_{i_j}^{(0)}$ jest jednoelementowa $J_{i_j} = [\lambda_i]$. Jeżeli natomiast wektorowi własnemu $v_{i_j}^{(0)}$ odpowiadają wektory główne $v_{i_j}^{(1)}, \dots, v_{i_j}^{(k)}$ związane z wektorem $v_{i_j}^{(0)}$ zależnościami:

$$(1) \quad \begin{cases} v_{i_j}^{(0)} = (A - \lambda I)v_{i_j}^{(1)} \\ v_{i_j}^{(1)} = (A - \lambda I)v_{i_j}^{(2)} \\ \vdots \\ v_{i_j}^{(k-1)} = (A - \lambda I)v_{i_j}^{(k)} \end{cases}$$

to klatka Jordana odpowiadająca wektorowi $v_{i_j}^{(0)}$ ma wymiar $(k+1) \times (k+1)$

$$J_{i_j} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

W macierzy J_{i_j} jej pierwszej kolumnie odpowiada wektor własny $v_{i_j}^{(0)}$, drugiej wektor główny $v_{i_j}^{(1)}$, odpowiednio $k+1$ -kolumnie wektor główny $v_{i_j}^{(k)}$. Kolumnami macierzy nieosobliwej P są wektory własne i główne. Konstrukcje macierzy P wyjaśnimy na przykładzie.

Niech macierz A wymiaru 5×5 ma dwie wartości własne: λ_1 o krotności 3, której odpowiadają wektory $v_1^{(0)}, v_1^{(1)}, v_1^{(2)}$ określone zależnością

(1) oraz wartość własną λ_2 o krotności **2** , której odpowiadają wektory $v_2^{(0)}, v_2^{(1)}$ określone zależnością (1). Wówczas klatki Jordana odpowiadające wartościom własnym λ_1 (odpowiednio λ_2) mają postać

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Macierz Jordana J ma wtedy postać:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

a kolumnami macierzy P są odpowiednio współrzędne wektorów

$$v_1^{(0)}, v_1^{(1)}, v_1^{(2)}, v_2^{(0)}, v_2^{(1)}.$$

Macierz Jordana J można zapisać też w postaci

$$J = \begin{bmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_1 \end{bmatrix},$$

ale wtedy kolumnami macierzy P są odpowiednio współrzędne wektorów

$$v_2^{(0)}, v_2^{(1)}, v_1^{(0)}, v_1^{(1)}, v_1^{(2)}.$$

10.2 Uwaga 1:

Jeżeli $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$ to $e^{tA} = P \cdot e^{tJ} \cdot P^{-1}$.

Istotnie, ponieważ $P \cdot P^{-1} = I$ więc

$$(P \cdot J \cdot P^{-1})^k = P \cdot J \cdot P^{-1} \cdot P \cdot J \cdot P^{-1} \dots P \cdot J \cdot P^{-1} = P \cdot J^k \cdot P^{-1}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} e^{tA} &= I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots + \frac{(At)^n}{n!} + \dots = \\ &= P \cdot P^{-1} + P \cdot J \cdot P^{-1}t + (P \cdot J \cdot P^{-1})^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + (P \cdot J \cdot P^{-1})^n \frac{t^n}{n!} + \dots = \\ &= P \cdot P^{-1} + P \cdot J \cdot P^{-1}t + P \cdot J^2 \cdot P^{-1} \frac{t^2}{2!} + \dots + P \cdot J^n \cdot P^{-1} \frac{t^n}{n!} + \dots = \\ &= P \cdot (I + Jt + J^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + J^n \frac{t^n}{n!} + \dots) \cdot P^{-1} = P \cdot e^{tJ} \cdot P^{-1} \end{aligned}$$

co należało wykazać.

10.3 Uwaga 2:

Jeżeli

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_k \end{bmatrix} \quad \text{to} \quad e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{tJ_k} \end{bmatrix}.$$

Wynika to bezpośrednio z faktu, że m -ta potęga macierzy J jest równa

$$J^m = \begin{bmatrix} J_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_k^m \end{bmatrix}.$$

Niech J_i będzie klatką Jordana wymiaru $s \times s$

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Macierz J_i możemy zapisać jako sumę macierzy $J_i = D_i + M_i$ gdzie

$$D_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad M_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $D_i \cdot M_i = M_i \cdot D_i$ więc na mocy uwagi 4 mamy

$$e^{tJ_i} = e^{t(D_i + M_i)} = e^{tD_i} \cdot e^{tM_i}.$$

10.4 Uwaga 3:

$M_i^n = 0$ dla $n \geq s$.

Prawdziwość tej zależności pokażemy na przykładzie, gdy $s = 3$

$$M_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_i^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_i^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Policzymy teraz e^{tD_i} . Ponieważ

$$D_i^m = \begin{bmatrix} \lambda_i^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_i^m \end{bmatrix}$$

więc

$$e^{tD_i} = I + tD_i + \frac{(tD_i)^2}{2!} + \frac{(tD_i)^3}{3!} + \dots + \frac{(tD_i)^n}{n!} + \dots =$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\lambda_i t)^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\lambda_i t)^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}.$$

Policzymy teraz e^{tM_i} . Z uwagi 3 mamy

$$e^{tM_i} = I + tM_i + \frac{(tM_i)^2}{2!} + \frac{(tM_i)^3}{3!} + \dots + \frac{(tM_i)^{s-1}}{(s-1)!} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \dots & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{s-3}}{(s-3)!} & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$e^{tJ_i} = e^{tD_i} \cdot e^{tM_i} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!}e^{\lambda_i t} & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & \dots & \frac{t^{s-3}}{(s-3)!}e^{\lambda_i t} & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!}e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}.$$

Wyznamy teraz macierze J , P , i e^{tJ} .

10.5 Przykład 1:

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wartościami własnymi macierzy A są

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1 + i, \lambda_3 = 1 - i,$$

a odpowiadające im wektory własne generujące podprzestrzenie własne $V_1^{(0)}, V_2^{(0)}, V_3^{(0)}$ są odpowiednio równe:

$$v_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2^{(0)} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3^{(0)} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Klatki Jordana odpowiadające wektorom $v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, v_3^{(0)}$ są odpowiednio równe:

$$J_1 = [1], \quad J_2 = [1 + i], \quad J_3 = [1 - i].$$

Zatem

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + i & 0 \\ 0 & 0 & 1 - i \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & -i & i \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uwzględniając fakt, że

$$e^{\alpha t + \beta ti} = e^{\alpha t} e^{\beta ti} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

otrzymujemy

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{tJ_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{t(1+i)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t(1-i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t (\cos t + i \sin t) & 0 \\ 0 & 0 & e^t (\cos t - i \sin t) \end{bmatrix}.$$

Wyznaczanie macierzy Jordana J i macierzy P za pomocą programu wolframalpha

<https://www.wolframalpha.com/input/?i=Jordan+decomposition%5B%7B1%2C+-1%2C2%7D%2C+%7B-1%2C+1%2C0%7D%2C%7B-1%2C0%2C1%7D%5D>

W tym przypadku $M=A$ a $S=P$.

Wyznaczanie macierzy e^{At} za pomocą programu wolframalpha

<https://www.wolframalpha.com/input/?i=MatrixExp%5B%7B1%2C+-1%2C2%7D%2C+%7B-1%2C+1%2C0%7D%2C%7B-1%2C0%2C1%7D%7D+t%5D>

10.6 Przykład 2:

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wartościami własnymi macierzy A są

$\lambda_1 = -3$ i $\lambda_2 = 3$ - o krotności **2**. Podprzestrzeń własna $V_1^{(0)}$ jest generowana przez wektor

$$v_1^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a podprzestrzeń własna $V_2^{(0)}$ ma wymiar **2** i generowana jest przez wektory

$$v_2^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad v_3^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wektorom własnym $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$ i $v_3^{(0)}$ odpowiadają odpowiednio następujące klatki Jordana:

$$J_1 = [-3], \quad J_2 = [3], \quad J_3 = [3].$$

Zatem

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{tJ_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

10.7 Przykład 3:

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}$. Pięciokrotną wartością własną macierzy

A jest $\lambda = 1$. Podprzestrzeń własna $V^{(0)}$ jest dwuwymiarowa i genero-

wana jest przez wektory $v_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $v_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Wektorowi własnemu

$v_1^{(0)}$ odpowiadają następujące wektory główne rzędu pierwszego i drugiego

$v_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ a wektorowi własnemu $v_2^{(0)}$ odpowiada następujący

wektor główny rzędu pierwszego $v_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Wektorom własnym $v_1^{(0)}$ i $v_2^{(0)}$ odpowiadają odpowiednio następujące klat-

ki Jordana: $J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Zatem

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{1}{2}t^2e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

10.8 Przykład 4:

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Wartościami własnymi macierzy A są $\lambda_1 =$

1 - o krotności **3** i $\lambda_2 = 3$ - o krotności **2**. Podprzestrzeń własna odpowiadają-

ca wartości własnej λ_1 jest dwuwymiarowa i generowana jest przez wektory

$$v_0^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad v_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

Podprzestrzeń własna odpowiadająca wartości własnej λ_2 jest jednowymia-

rowa i generowana jest przez wektor $v_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$. Wektorowi własnemu

$v_2^{(0)}$ odpowiada następujący wektor główny rzędu pierwszego $v_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Wektorom własnym $v_0^{(0)}$, $v_1^{(0)}$ i $v_2^{(0)}$ odpowiadają odpowiednio następujące klatki Jordana: $J_0 = [1]$, $J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Zatem

$$J = \begin{bmatrix} J_0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_0} & 0 & 0 \\ 0 & e^{tJ_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{tJ_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.$$

11 Przykłady rozwiązywania układów równań liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach przy użyciu macierzy wykładniczej

11.1 Przykład 1:

Wyznaczyć rozwiązanie problemu początkowego:

$$(1) \quad \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

W pierwszej kolejności wyznaczamy wartości własne macierzy A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{w_2+w_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{-k_1+k_2}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

zatem $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ są jednokrotnymi wartościami własnymi macierzy A . Wyznaczamy teraz podprzestrzenie własne dla λ_1 , λ_2 i λ_3 .
Dla $\lambda_1 = 1$.

$$V_1^{(0)} = \{X : (A - I) \cdot X = 0\},$$

$$(A - I) \cdot X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Zatem podprzestrzeń własna $V_1^{(0)}$ ma postać

$$V_1^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

i wektorem własnym generującym tę podprzestrzeń jest

$$v_1^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dla $\lambda_2 = 2$.

$$V_2^{(0)} = \{X : (A - 2I) \cdot X = 0\},$$

$$(A - 2I) \cdot X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}.$$

Zatem podprzestrzeń własna $V_2^{(0)}$ ma postać

$$V_2^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_2, \quad x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

i wektorem własnym generującym tę podprzestrzeń jest

$$v_2^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dla $\lambda_3 = 3$.

$$V_3^{(0)} = \{X : (A - 3I) \cdot X = 0\},$$

$$(A - 3I) \cdot X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Zatem podprzestrzeń własna $V_3^{(0)}$ ma postać

$$V_3^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} x_1, \quad x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

i wektorem własnym generującym tę podprzestrzeń jest

$$v_3^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Macierze J , P i P^{-1} mają więc postać:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$, więc

$$\begin{aligned} e^{tA} &= P \cdot e^{tJ} \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^t - e^{2t} + e^{3t} & e^t - e^{2t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ e^{2t} - e^{3t} & e^{2t} & e^{2t} - e^{3t} \\ -e^t + e^{2t} & -e^{-t} + e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie problemu początkowego (1) jest zatem postaci

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t - e^{2t} + e^{3t} & e^t - e^{2t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ e^{2t} - e^{3t} & e^{2t} & e^{2t} - e^{3t} \\ -e^t + e^{2t} & -e^{-t} + e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

11.2 Uwaga 1:

Jeżeli szukamy rozwiązania ogólnego układu równań $x'(t) = A \cdot x(t)$ i wartości własne macierzy A są rzeczywiste, to rozwiązanie ogólne jest postaci:

$$x(t) = e^{tA} \cdot C = P \cdot e^{tJ} \cdot P^{-1} \cdot C = P \cdot e^{tJ} \cdot \tilde{C} \quad \text{gdzie} \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \vdots \\ \tilde{c}_n \end{bmatrix}$$

$\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n$ są to dowolne stałe rzeczywiste. W takiej sytuacji nie ma potrzeby wyznaczać macierzy odwrotnej: P^{-1} , ponieważ dla dowolnego stałego wektora C istnieje stała $\tilde{C}$ taka, że $\tilde{C} = P^{-1} \cdot C$.

11.3 Przykład 2:

Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu równań:

$$x'(t) = A \cdot x(t) \quad \text{gdzie} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczamy wartości własne macierzy A :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{-w_2 + w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 2 & \\ -2 & 1 & -1 - \lambda & \end{vmatrix} \stackrel{k_1 + k_2}{=} \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 2 \\ -2 & -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 + 1) = 0$$

zatem $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$ są jednokrotnymi wartościami własnymi macierzy A . Wyznaczamy teraz podprzestrzenie własne dla λ_1 , λ_2 i λ_3 .

Dla $\lambda_1 = 1$.

$$V_1^{(0)} = \{X : (A - I) \cdot X = 0\},$$

$$(A - I) \cdot X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \stackrel{r_1 \leftrightarrow r_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_3 \\ x_1 = 0 \end{cases}.$$

Zatem podprzestrzeń własna $V_1^{(0)}$ ma postać

$$V_1^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

i wektorem własnym generującym tą podprzestrzeń jest $v_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dla $\lambda_2 = i$.

$$V_2^{(0)} = \{X : (A - iI) \cdot X = 0\},$$

$$(A - iI) \cdot X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 - i & -1 & 2 \\ 1 & -i & 2 \\ -2 & 1 & -1 - i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 - i)x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - ix_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + (-1 - i)x_3 = 0 \end{cases} \stackrel{-r_2 \leftrightarrow r_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (1 - i)x_1 + (i - 1)x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - (1 + i)x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = \frac{i-1}{2}x_2 \end{cases}.$$

Zatem podprzestrzeń własna $V_2^{(0)}$ ma postać

$$V_2^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 2x_2 \\ (i-1)x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ i-1 \end{bmatrix} x_2, \quad x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

i wektorem własnym generującym tę podprzestrzeń jest $v_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ i-1 \end{bmatrix}$.

Dla $\lambda_3 = -i$.

W tym przypadku $V_3^{(0)} = \overline{V_2^{(0)}}$ i

$$v_3^{(0)} = \overline{v_2^{(0)}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1-i \end{bmatrix}.$$

Macierze J , P i P^{-1} mają więc postać:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1+i & -1-i \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}i & \frac{1}{4}i & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i & -\frac{1}{4}i & \frac{1}{2}i \end{bmatrix}.$$

Wyznaczamy macierz e^{tJ}

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-it} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & \cos t + i \sin t & 0 \\ 0 & 0 & \cos t - i \sin t \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$e^{tA} = P \cdot e^{tJ} \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1+i & -1-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & \cos t + i \sin t & 0 \\ 0 & 0 & \cos t - i \sin t \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}i & \frac{1}{4}i & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i & -\frac{1}{4}i & \frac{1}{2}i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \sin t + \cos t & -\sin t & 2 \sin t \\ -e^t + 2 \sin t + \cos t & e^t - \sin t & 2 \sin t \\ \frac{1}{2}(-e^t - 3 \sin t + \cos t) & \frac{1}{2}(e^t + \sin t - \cos t) & \cos t - \sin t \end{bmatrix}.$$

Zatem rozwiązanie ogólne ma postać:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \sin t + \cos t & -\sin t & 2 \sin t \\ -e^t + 2 \sin t + \cos t & e^t - \sin t & 2 \sin t \\ \frac{1}{2}(-e^t - 3 \sin t + \cos t) & \frac{1}{2}(e^t + \sin t - \cos t) & \cos t - \sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} (2 \sin t + \cos t)c_1 & -\sin t c_2 & 2 \sin t c_3 \\ (-e^t + 2 \sin t + \cos t)c_1 & (e^t - \sin t)c_2 & 2 \sin t c_3 \\ \frac{1}{2}(-e^t - 3 \sin t + \cos t)c_1 & \frac{1}{2}(e^t + \sin t - \cos t)c_2 & (\cos t - \sin t)c_3 \end{bmatrix}$$

gdzie c_1, c_2, c_3 są to dowolne stałe rzeczywiste.

Przykład 2 pokazuje, że jeżeli macierz A ma wartości własne zespolone, to macierz $P \cdot e^{tJ}$ jest zespolona, natomiast macierz $P \cdot e^{tJ} \cdot P^{-1}$ jest rzeczywista, dlatego w takich przypadkach musimy wyznaczyć macierz P^{-1} , bo inaczej otrzymalibyśmy rozwiązanie zespolone układu.

11.4 Zadanie 1:

Treść zadania: Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu równań:

$$x'(t) = A \cdot x(t), \quad \text{gdzie} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie: Obliczamy wartości własne macierzy A :

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 3 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(1 - \lambda)^2 + 1 + 3(1 - \lambda) = -(\lambda - 2)^3 = 0$$

zatem $\lambda = 2$ jest 3-krotną wartością własną macierzy A . Wyznamy podprzestrzeń własną odpowiadającą wartości własnej $\lambda = 2$. $V^{(0)} = \{X : (A - 2I) \cdot X = 0, \}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 2x_1 \\ x_2 = x_1 \end{cases}$$

zatem

$$V^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_1, \quad x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wymiar podprzestrzeni własnej $V^{(0)}$ jest równy 1 i jest mniejszy od krotności wartości własnej. W związku z tym, wyznaczamy podprzestrzeń główną rzędu pierwszego

$$V^{(1)} = \{X : (A - 2I)^2 \cdot X = 0, \}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_3 = x_1 + x_2$$

zatem

$$V^{(1)} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wymiar podprzestrzeni głównej rzędu pierwszego $V^{(1)}$ jest równy **2** i jest mniejszy od krotności wartości własnej. W tej sytuacji wyznaczamy podprzestrzeń główną rzędu drugiego

$$V^{(2)} = \{X : (A - 2I)^3 \cdot X = 0, \}.$$

Ponieważ $(A - 2I)^3 = 0$, więc $V^{(2)} = \mathbb{R}^3$. Bierzemy teraz dowolny wektor

$$v^{(2)} \in V^{(2)} \setminus V^{(1)}. \text{ Niech } v^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ wtedy}$$

$$v^{(1)} = (A - 2I)v^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

i

$$v^{(0)} = (A - 2I)v^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Wektory $v^{(0)}$, $v^{(1)}$ i $v^{(2)}$ są liniowo niezależne. Stąd wynika, że macierze J i P są postaci:

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem macierz e^{tJ} jest następująca

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{1}{2}t^2e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

i rozwiązanie ogólne rozważanego układu można zapisać następująco :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = P \cdot e^{tJ} \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{1}{2}t^2e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} + 2e^{2t} & \frac{1}{2}t^2e^{2t} + 2te^{2t} + e^{2t} \\ e^{2t} & te^{2t} + e^{2t} & \frac{1}{2}t^2e^{2t} + te^{2t} \\ 2e^{2t} & 2te^{2t} + 3e^{2t} & t^2e^{2t} + 3te^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

gdzie c_1 , c_2 , c_3 są to dowolne stałe, należące do zbioru liczb rzeczywistych.

12 Przykłady rozwiązywania układów równań liniowych niejednorodnych o stałych współczynnikach metodą uzmienniania stałych

Rozważmy układ równań:

$$(1) \quad x'(t) = A \cdot x(t) + f(t) \quad \text{dla } t \in I \subset \mathbb{R}$$

gdzie

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Jeżeli funkcje

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{bmatrix} x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad x_n(t) = \begin{bmatrix} x_{n1}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

stanowią układ fundamentalny rozwiązań dla układu jednorodnego :

$$(2) \quad x'(t) = A \cdot x(t),$$

to macierz

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

nazywamy **macierzą fundamentalną układu** (2). Z twierdzenia 3 wynika, że rozwiązanie ogólne układu równań (1) jest postaci

$$(3) \quad x(t) = X(t) \cdot \left(C + \int X^{-1}(t) \cdot f(t) dt \right)$$

gdzie $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, a $c_1, \dots, c_n$ -są to dowolne stałe. Natomiast rozwiązanie

układu równań (1) spełniającego warunek początkowy

$$(4) \quad x_1(t_0) = x_{01}, \quad x_2(t_0) = x_{01}, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = x_{0n},$$

gdzie $x_{01}, \dots, x_{0n}$, są dane, a t_0 jest ustalonym punktem przedziału I , jest postaci:

$$(5) \quad x(t) = X(t) \cdot \left(X^{-1}(t_0) \cdot x_0 + \int_{t_0}^t X^{-1}(s) \cdot f(s) ds \right).$$

12.1 Przykład 1:

Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu (1) gdy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad f(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Wyznaczamy wartości własne macierzy A :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

więc $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 4$ są pierwiastkami tego równania.

Dla $\lambda_1 = 1$ wyznaczmy podprzestrzeń własną

$$V_1^{(0)} = \{x : (A - I) \cdot x = 0, \} \quad \text{gdzie} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A - I) \cdot x = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \iff x_2 = -x_1.$$

Zatem

$$V_1^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} x_1 \quad x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Podprzestrzeń $V_1^{(0)}$ jest generowana przez wektor własny

$$v_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dla $\lambda_2 = 4$ wyznaczmy podprzestrzeń własną

$$V_2^{(0)} = \{x : (A - 4I) \cdot x = 0, \} \quad \text{gdzie} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A - 4I) \cdot x = 0$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff x_2 = 2x_1.$$

Zatem

$$V_2^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_1 \quad x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Podprzestrzeń $V_2^{(0)}$ jest generowana przez wektor $v_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Wyznamy teraz macierz e^{tA} , która jest macierzą fundamentalną rozwiązanego układu. Ponieważ $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$, gdzie

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

więc

$$e^{tA} = P \cdot e^{tJ} \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} & -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} & \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ macierz odwrotną do macierzy e^{tA} jest macierz e^{-tA} , więc rozwiązanie rozwiązanego układu jest postaci

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \cdot \left(C + \int e^{-tA} \cdot f(t) dt \right) = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} & -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} & \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \int \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} & -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ e^t \end{bmatrix} dt \right) = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} & -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} & \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \int \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} + \frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3} \end{bmatrix} dt \right) = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} & -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} & \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int (\frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}) dt \\ \int (-\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-4t} + \frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3}) dt \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} & -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{4t} \\ -\frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} & \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{12}e^{-4t} - \frac{1}{9}e^{-3t} - \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}t + c_1 \\ \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-4t} - \frac{2}{9}e^{-3t} + \frac{1}{3}t + c_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{36}(-27 + 12(c_1 + c_2)e^{4t} - 4e^t(1 - 6c_1 + 3c_2 + 3t)) \\ \frac{1}{18}(9 + 12(c_1 + c_2)e^{4t} + 2e^t(-2 - 6c_1 + 3c_2 + 3t)) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu równań za pomocą programu wolframalpha

https://www.wolframalpha.com/input/?i=x1%27%28t%29%3D2*x1%2Bx2%2B1%2C+x2%27%3D2*x1%2B3*x2%2Be%5Et

12.2 Przykład 2:

Wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu (1), gdy $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $f(t) =$

$\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} e^{2t}$. Wyznamy wartości własne macierzy A :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 + 1 = 0$$

więc $\lambda_1 = 1 - i$ i $\lambda_2 = 1 + i$ są pierwiastkami tego równania.

Dla $\lambda_1 = 1 - i$ wyznaczmy podprzestrzeń własną

$$V_1^{(0)} = \{x : (A - \lambda_1 I) \cdot x = 0, \}, \text{ gdzie } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy układ równań $(A - (1 - i) \cdot I) \cdot x = 0$:

$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 i - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 i = 0 \end{cases} \iff x_2 = x_1 i.$$

Zatem

$$V_1^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} x_1 \quad x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Podprzestrzeń $V_1^{(0)}$ jest generowana przez wektor własny

$$v_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} i.$$

Do wyznaczenia układu fundamentalnego rozwiązań dla układu jednorodnego wykorzystamy zależności 3 i 4. Ponieważ $\alpha = 1$ i $\beta = 1$, więc

$$\Re(v_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \Im(v_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Stąd z zależności 3 i 4 mamy następujące rozwiązania liniowo niezależne, odpowiadające wartościom własnym λ_1 i λ_2 :

$$x_1(t) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t \right) e^t,$$

$$x_2(t) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t \right) e^t.$$

Macierz fundamentalna układu jednorodnego ma postać:

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix}.$$

Ponieważ macierz odwrotna do macierzy $X(t)$ jest następująca

$$X^{-1}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \cos t & -e^{-t} \sin t \\ e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t \end{bmatrix},$$

więc rozwiązanie rozważanego układu jest postaci

$$\begin{aligned}
 x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} &= X(t) \cdot \left(C + \int X^{-1}(t) \cdot f(t) dt \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \int \begin{bmatrix} e^{-t} \cos t & -e^{-t} \sin t \\ e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} e^{2t} dt \right) = \\
 &= \begin{bmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \int \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix} dt \right) = \begin{bmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 + e^t \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} e^t(c_1 \cos t + (c_2 + e^t) \sin t) \\ e^t(-c_1 \sin t + (c_2 + e^t) \cos t) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu równań za pomocą programu wolframalpha

https://www.wolframalpha.com/input/?i=x1%27%28t%29%3Dx1-x2%2Be%5Et*sin%28t%29%2C+x2%27%3Dx1%2Bx2%2Be%5Et*cos%28t%29