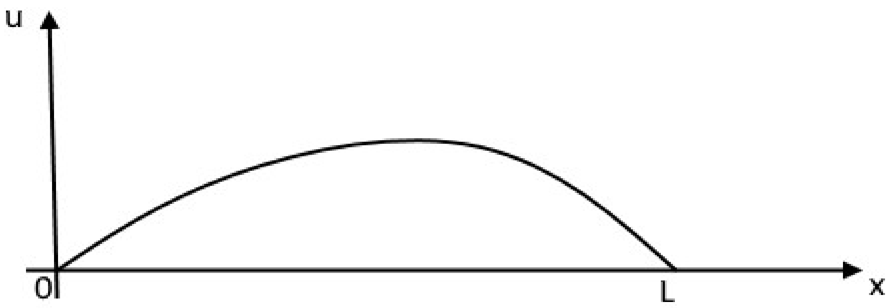
Drgająca struna, wyprowadzenie równania falowego.

Rozważmy idealnie elastyczną i sprężystą strunę rozciągniętą wzdłuż odcinka [0, L] na osi 0x, poruszającą się prostopadle do położenia równowagi.

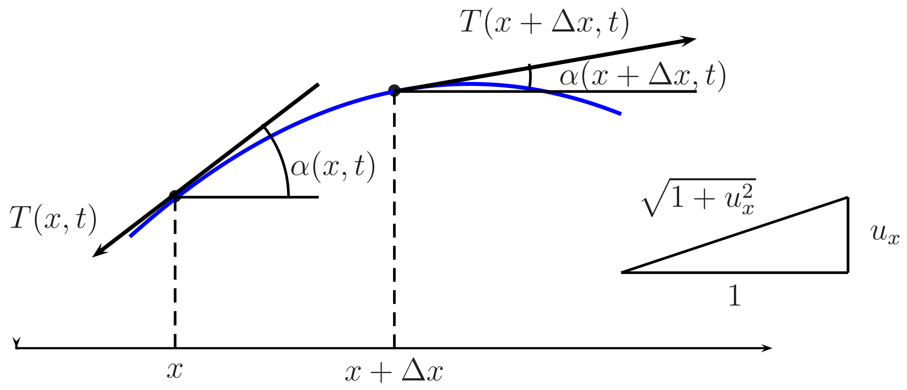


Niech $\rho_0(x)$ oznacza gęstość struny w położeniu równowagi i $\rho(x,\, t)$ gęstość w czasie t. W dowolnie małym przedziale $[x,\; x + \Delta x]$ rozważmy element struny , patrz rys. 1.

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho_0(x)\, dx = m = \int_x^{x+\Delta x} \rho(x,t)\sqrt{1+u_x^2}\, dx. \qquad (1)$$

Stąd mamy:

$$\rho_0(x) = \rho(x,t)\sqrt{1+u_x^2}. \qquad (2)$$



Rys.**1:** Drgania struny.

Niech $T(x,\ t)$ i $T(x + \Delta x,\ t)$ oznaczaja naprężenia na końcach rozpatrywanego elementu na przedziale [x, x + Δx]. Określimy teraz jakie siły działaj na rozpatrywany element struny. Ponieważ struna przemieszcza się prostopadle do osi 0x więc siły w poziomie powinny się rónoważyć :

$$T(x+\Delta x, t)\cos\alpha(x+\Delta x, t) - T(x, t)\cos\alpha(x, t) = 0. \tag{3}$$

Dzieląc (3) przez Δx i zmierzając z $\Delta x \to 0$, otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(T(x,t)\cos\alpha(x,t)\Big) = 0, \tag{4}$$

więc

$$T(x,t)\cos\alpha(x,t) = \tau(t), \tag{5}$$

$\tau(t) > 0$ ponieważ jest pionową składową naprężenia.

Z drugiej strony ruch w kierunku pionowym jest spowodowany zmianą pędu pod wpływem sił działających na dany element w kierunku pionowym.

Zatem, z (2), pęd małego elementu $[x, x+\Delta x]$ określony jest zależnością

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho_0(x) u_t\, dx = \int_x^{x+\Delta x} \rho(x,t)\sqrt{1+u_x^2}\, u_t\, dx, \tag{6}$$

z szybkością zmiany pedu:

$$\frac{d}{dt}\int_x^{x+\Delta x} \rho_0 u_t\, dx = \int_x^{x+\Delta x} \rho_0 u_{tt}\, dx. \tag{7}$$

Są dwa rodzaje sił działające na element $[x, x+\Delta x]$ struny:
(i) siły wynikające z napięcia które powodują naprężenia których składowe poziome się znoszą i
(ii) sił działających na całej długości struny, takie jak ciężar. Zatem z (5), różnica sił działających na końce elementu $[x, x+\Delta x]$ stuny wynosi:

$$\begin{aligned} T(x+\Delta x,t)\sin\alpha(x+\Delta x,t) - T(x,t)\sin\alpha(x,t) \\ &= \tau\Big(\frac{\sin\alpha(x+\Delta x,t)}{\cos\alpha(x+\Delta x,t)} - \frac{\sin\alpha(x,t)}{\cos\alpha(x,t)}\Big) \\ &= \tau\Big(\tan\alpha(x+\Delta x,t) - \tan\alpha(x,t)\Big) \\ &= \tau\Big(u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)\Big). \end{aligned} \tag{8}$$

Ponadto siła ciężkości działająca w dół wynosi:

$$-\int \rho\, g\, dS = -\int_x^{x+\Delta x} \rho\, g\sqrt{1+u_x^2}\, dx = -\int_x^{x+\Delta x} \rho_0 g\, dx. \tag{9}$$

Następnie dla siły zewnętrznej o gęstości f(x, t) działającej na strunę mamy:

$$\int \rho\, f\, dS = \int_x^{x+\Delta x} \rho_0 f(x,t)\, dx. \tag{10}$$

Na koniec należy określić siły tarcia działające na odcinek struny. Przyjmiemy, że siła tarcia wyraża się zależnością:

$$-\int \sigma\,\rho\, u_t\, dS = -\int_x^{x+\Delta x} \sigma\,\rho\,\sqrt{1+u_x^2}\, u_t\, dx = -\int_x^{x+\Delta x} \sigma\,\rho_0\, u_t\, dx. \tag{11}$$

Teraz stosując drugie prawo Newtona mam zalezność:

$$\begin{aligned} \int_x^{x+\Delta x} \rho_0 u_{tt}\, dx &= \tau[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)] \\ &\quad - \int_x^{x+\Delta x} \sigma\,\rho_0\, u_t\, dx + \int_x^{x+\Delta x} \rho_0 (f-g)\, dx. \end{aligned} \tag{12}$$

Dzieląc (12) przez Δx i zmierzając z $\Delta x \to 0$ otrzymamy równanie:

$$\rho_0 u_{tt} = \tau u_{xx} - \sigma\, \rho_0\, u_t + \rho_0 (f - g). \tag{13}$$

Przyjmując oznaczenia $c^2 = \tau / \rho_0$ i $F = f - g$, równanie (13) ma postać:

$$u_{tt} + \sigma\, u_t = c^2 u_{xx} + F. \tag{14}$$

Równanie (14) opisuje wibracje rozpatrywanej struny po wprawieniu jej w ruch. Ze względu na obecność tarcia σut, równanie (14) jest często określane jako tłumione jednowymiarowe równanie falowe. Jeśli tarcie jest znikome, możemy przyjąć, że σ = 0 i otrzymujemy niejednorodne równanie falowe:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + F. \tag{15}$$

W przypadku braku sił zewnętrznych i gdy ciężar struny jest znikomy, możemy przyjąć $F \equiv 0$, aby uzyskać jednowymiarowe równanie falowe:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}. \tag{16}$$