Metoda rozdzielania albo separacji zmiennych, zwana też metodą Fouriera, jest jedną z najstarszych metod rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Polega ona na próbie wyznaczenia rozwiązania danego równania w postaci kombinacji funkcji o mniejszej ilości zmiennych. Najczęściej szukamy rozwiązania w postaci sumy lub iloczynu funkcji. W szczególności, jeśli szukane rozwiązanie u jest funkcją zmiennych x i t, , to rozwiązania tego możemy szukać w postaci iloczynu dwóch funkcji z których jedna jest funkcją zmiennej x, a druga zmiennej t. Metoda ta jest szczególnie przydatna, jeśli szukamy rozwiązania w zbiorze ograniczonym o zadanych wartościach na brzegu obszaru. Zinterpretujemy to poniżej rozważając równanie struny ograniczonej jednorodnej o jednorodnych warunkach brzegowych.
Rozważmy równanie struny

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{1}$$

z warunkami brzegowymi

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{2}$$

oraz warunkami początkowymi

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{3}$$

Przyjmujemy przy tym, że $\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0.$ Szukamy rozwiązania w postaci

$$u(x,t) = T(t)X(x).$$

Podstawiając ostatnią funkcje do równania (1) otrzymamy

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x).$$

Przyjmując, że $T \neq 0$ i $X \neq 0$ możemy ostatnie równanie przekształcić do postaci

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Ponieważ lewa strona zależy tylko od t, zaś prawa strona tylko od x, zatem oba ilorazy muszą być równe stałej. Oznaczając tę stałą przez $-\lambda$, ostatnią równość możemy zapisać w postaci dwóch równań:

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{4}$$

Ponadto z warunków brzegowych (2) wynika natychmiast, że

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{5}$$

Przedyskutujemy teraz rozwiązania równań (4) w zależności od znaku λ
Przypadek $\lambda < 0$.
Rozwiązania równań (4) mają postać:

$$T(t) = Ae^{\sqrt{-\lambda}at} + Be^{-\sqrt{-\lambda}at}, \qquad X(x) = Ce^{\sqrt{-\lambda}x} + De^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Z warunków brzegowych (5) wynika, że $C = D = 0$, czyli $u(x,t) = 0.$. Ponieważ rozwiązanie zerowe nie jest dla nas interesujące, przypadek ten należy odrzucić.
Przypadek $\lambda = 0$.
Rozwiązania równań (4) mają postać:

$$T(t) = A + Bt, \qquad X(x) = C + Dx.$$

Uwzględniając warunki brzegowe (5) otrzymamy jak poprzednio $u(x,t) = 0,$, a zatem również ten przypadek należy odrzucić.
Przypadek $\lambda > 0$.
Wygodnie jest teraz w równaniu (4) symbol λ zastąpić symbolem λ^2, czyli zapisać te równania w postaci:

$$T''(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0, \quad X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Rozwiązania mają wówczas postać

$$T(t) = A\cos(\lambda at) + B\sin(\lambda at), \quad X(x) = C\cos(\lambda x) + D\sin(\lambda x).$$

Z warunku $X(0) = 0$ wynika, że $C = 0$, a warunek $X(l) = 0$ daje równość $\sin(\lambda l) = 0$, która jest spełniona dla $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n \in \mathbb{N}$.
Wartości te nazywamy **wartościami własnymi**. Zauważmy, że tylko dla takich wartości λ może istnieć szukane rozwiązanie.
Dla $n \in \mathbb{N}$ położmy

$$T_n(t) = A_n\cos(\frac{na\pi}{l}t) + B_n\sin(\frac{na\pi}{l}t), \qquad X_n(x) = C_n\sin(\frac{n\pi}{l}x)$$

oraz

$$u_n(x,t) = \left(A_n\cos(\frac{na\pi}{l}t) + B_n\sin(\frac{na\pi}{l}t)\right)\sin(\frac{n\pi}{l}x). \tag{6}$$

Zauważmy, że tak określona funkcja u_n jest rozwiązaniem równania (1), spełnia warunki brzegowe (2), ale na ogół nie spełnia warunków początkowych (3). Rozwiązania równania (1) które będzie spełniać waruneki (2) i (3) będziemy szukać w postaci sumy szeregu

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t). \tag{7}$$

Załóżmy, że szereg po prawej stronie jest jednostajnie zbieżny jak również szereg pierwszych i drugich pochodnych jest jednostajnie zbieżny do odpowiedniej pochodnej z funkcji u. . Przy przyjętych założeniach pochodne szeregu są równe szeregowi pochodnych, a funkcja u spełnia równanie (1) oraz warunki brzegowe (2). Oczywiście

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi}{l}x).$$

Załóżmy dalej, że funkcje φ można rozwinąć w szereg sinusów w przedziale $[0,l]$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(\frac{n\pi}{l}x),$$

gdzie

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin(\frac{n\pi}{l}s)ds.$$

Zauważmy, że pierwszy z warunków początkowych $u(x,0) = \varphi(x)$ jest spełniony, jeśli $A_n = \alpha_n$, czyli

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin(\frac{n\pi}{l}s)ds.$$

W celu zapewnienia drugiego z warunków początkowych należy policzyć pochodną z funkcji u względem t .

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na\pi}{l}\Big(- A_n \sin(\frac{na\pi}{l}t) + B_n \cos(\frac{na\pi}{l}t)\Big)\sin(\frac{n\pi}{l}x).$$

Stąd

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na\pi}{l}B_n \sin(\frac{n\pi}{l}x).$$

Rozwijając funkcje ψ w szereg sinusów otrzymamy

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(\frac{n\pi}{l}x),$$

gdzie

$$\beta_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(s)\sin(\frac{n\pi}{l}s)ds.$$

Zatem drugi z warunków początkowych (3) jest spełniony, jeśli

$$\frac{na\pi}{l}B_n = \beta_n,$$

czyli

$$B_n = \frac{2}{na\pi} \int_0^l \psi(s) \sin(\frac{n\pi}{l} s) ds.$$

Szukane rozwiązanie (7) ma zatem postać

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg[\frac{2}{l} \int_0^l \Big(\varphi(s) \sin(\frac{n\pi}{l} s)\Big) ds \, \cos(\frac{na\pi}{l} t) + \\ \frac{2}{na\pi} \int_0^l \Big(\psi(s) \sin(\frac{n\pi}{l} s)\Big) ds \, \sin(\frac{na\pi}{l} t) \Bigg] \sin(\frac{n\pi}{l} x). \end{aligned} \tag{8}$$

Rozważmy ponownie rozwiązanie u_n dane wzorem (6). Kładąc

$$\rho_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \cos(\widetilde{\varphi}_n) = \frac{A_n}{\rho_n}, \quad \sin(\widetilde{\varphi}_n) = \frac{B_n}{\rho_n}, \quad \varphi_n = \frac{l}{na\pi} \widetilde{\varphi}_n,$$

otrzymamy

$$u_n(x,t) = \rho_n \cos\Big(\frac{na\pi}{l}(t - \varphi_n)\Big) \sin\Big(\frac{n\pi}{l} x\Big).$$

Funkcja u_n opisuje drgania harmoniczne (tzw. n-ta harmoniczna) odpowiadające wartości własnej $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, przy czym występujące tu wielkości mają następującą interpretacje fizyczną:

$\rho_n \sin(\frac{n\pi}{l} x) -$ amplituda drgania n -tejharmonicznej;

$\omega_n = \frac{na\pi}{l} -$ częstotliwość drgania n -tej harmonicznej.

Pamiętając że $a^2 = \frac{T}{\rho}$, gdzie T oznacza siłę naprężenia a ρ gęstość, otrzymamy $\omega_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

Częstotliwość $\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ odpowiada tzw. dźwiękowi podstawowemu (zwanemu też pierwszą harmoniczną). Jest to dźwięk najsilniejszy. Melodia struny zależy natomiast od dalszych dźwięków uzupełniających. Jeśli $A_1 = \ldots = A_{n-1} = 0$ oraz $B_1 = \cdots = B_{n-1} = 0$, natomiast $A_n \neq 0$ lub $B_n \neq 0$, dźwięk podstawowy odpowiada częstotliwości ω_n. Wynika stąd, że dźwięk struny zależy od warunków początkowych $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ oraz wielkości l, T i ρ .

0.1 Informacja dodatkowa 1: Uzasadnienie poprawności metody

Opisane w powyżej postępowanie jest słuszne, jeśli szereg (7) oraz szeregi pierwszych i drugich pochodnych są jednostajnie zbieżne. Podamy teraz proste warunki przy których zbieżność taka zachodzi.
Przypomnijmy, że

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos(\frac{an\pi}{l}t) + B_n \sin(\frac{an\pi}{l}t) \Big) \sin(\frac{n\pi}{l}x),$$

gdzie

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin(\frac{n\pi}{l}s)ds, \quad B_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(s)\sin(\frac{n\pi}{l}s)ds.$$

Oczywiście $|u_n(x,t)| \leqslant |A_n| + |B_n|$.
Z równości

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t) = \frac{an\pi}{l}\Big(- A_n \sin(\frac{na\pi}{l}t) + B_n \cos(\frac{na\pi}{l}t) \Big) \sin(\frac{n\pi}{l}x),$$

wynika, że

$$|\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)| \leqslant \frac{na\pi}{l}\big(|A_n| + |B_n|\big).$$

Podobnie możemy pokazać, że

$$\Big|\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_n(x,t)\Big| \leqslant \Big(\frac{na\pi}{l}\Big)^2\big(|A_n| + |B_n|\big);$$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial x}u_n(x,t)\Big| \leqslant \frac{n\pi}{l}\big(|A_n| + |B_n|\big);$$

$$\Big|\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_n(x,t)\Big| \leqslant \Big(\frac{n\pi}{l}\Big)^2\big(|A_n| + |B_n|\big).$$

Aby uzyskać jednostajną zbieżność wspomnianych wyżej szeregów wystarczy pokazać, że zbieżne są szeregi liczbowe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k|A_n| \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^k|B_n|, \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2.$$

Oczywiście wystarczy pokazać zbieżność tych szeregów dla $k = 2$. Pokażemy teraz zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2|A_n|$$

przy dodatkowym założeniu, że funkcja φ posiada czwartą pochodną, pochodna ta jest funkcją całkowalną i ponadto $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ oraz $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$. Przyjmując $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{l}$ mamy

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin(\lambda_n s)ds.$$

Całkując czterokrotnie przez części otrzymamy

$$\int_0^l \varphi(s)\sin(\lambda_n s)\,ds = -\frac{1}{\lambda_n}\varphi(s)\cos(\lambda_n s)\Big|_0^l + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^l \varphi'(s)\cos(\lambda_n s)\,ds$$

$$= \frac{1}{\lambda_n}\int_0^l \varphi'(s)\cos(\lambda_n s)\,ds = \frac{1}{\lambda_n^2}\varphi'(s)\sin(\lambda_n s)\Big|_0^l - \frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^l \varphi''(s)\sin(\lambda_n s)\,ds$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^l \varphi''(s)\sin(\lambda_n s)\,ds = \frac{1}{\lambda_n^3}\varphi''(s)\cos(\lambda_n s)\Big|_0^l - \frac{1}{\lambda_n^3}\int_0^l \varphi'''(s)\cos(\lambda_n s)\,ds$$

$$= -\frac{1}{\lambda_n^3}\int_0^l \varphi'''(s)\cos(\lambda_n s)\,ds = -\frac{1}{\lambda_n^4}\varphi'''(s)\sin(\lambda_n s)\Big|_0^l + \frac{1}{\lambda_n^4}\int_0^l \varphi''''(s)\sin(\lambda_n s)\,ds$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^4}\int_0^l \varphi''''(s)\sin(\lambda_n s)\,ds.$$

Stąd

$$|A_n| = \left|\frac{2}{l}\frac{1}{\lambda_n^4}\int_0^l \varphi''''(s)\sin(\lambda_n s)\,ds\right| \leqslant \frac{2l^3}{n^4\pi^4}\int_0^l |\varphi''''(s)|\,ds = \frac{1}{n^4}C,$$

gdzie $C = \dfrac{2l^3}{\pi^4}\displaystyle\int_0^l |\varphi''''(s)|\,ds.$
W konsekwencji

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2|A_n| \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

skąd - na mocy kryterium porównawczego - wynika natychmiast, że badany szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2|A_n|$$

jest zbieżny. Analogicznie możemy pokazać, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2|B_n|$$

jest zbieżny. Oczywiście, przy przyjętych założeniach, również szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|A_n|$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|B_n|$$

są zbieżne. Oznacza to, że powyższa metoda przy przyjętych założeniach o funkcjach φ i ψ jest poprawna. **Z teorii szeregów Fouriera** wiadomo, że przyjęte tu założenia o funkcjach φ i ψ można znacznie osłabić.