Regularne zagadnienie Sturma-Liouville'a
Sturma-Liouville'a operator ma postać:

$$L = \frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{d}{dt}\right) + q(t). \tag{1}$$

Sturma-Liouville'a problem własny ma postać:

$$L[u] = -\lambda \cdot w(t) \cdot u$$

lub

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{du}{dt}\right) + q(t)u + \lambda w(t)u = 0, \quad t \in (a,b). \tag{2}$$

zakładamy, że $p(t)$, $p'(t)$, $q(t)$ i $w(t)$ są ciągłe na (a,b) i $p(t) > 0$, $w(t) > 0$ na $[a,b]$.
Będziemy rozpatrywać problem Sturma-Lioville'a z warunkami brzegowymi:

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \quad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \tag{3}$$

gdzie $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$.
Twierdzenie 1. Niech λ będzie wartością własną problemu (2), (3) a φ_1, φ_2 rozwiązaniami odpowiadającymi wartości własnej λ. Wówczas funkcje te są liniowo zależne.
Dowód Uwzgledniając warunek brzegowy w punkcie a mamy układ równań

$$\begin{cases} \alpha_1\varphi_1(a) + \alpha_2\varphi_1'(a) = 0 \\ \alpha_1\varphi_2(a) + \alpha_2\varphi_2'(a) = 0. \end{cases}$$

Ponieważ przynajmniej jeden ze współczynników α_1, α_2 jest różny od zera, z twierdzenia Cramera wynika, że

$$\det\begin{bmatrix} \varphi_1(a) & \varphi_1'(a) \\ \varphi_2(a) & \varphi_2'(a) \end{bmatrix} = 0.$$

Z teorii równań różniczkowych wynika, że jeżeli wrońskianin jest różny od zero dla pewnego t z przedziału $[a,b]$, to jest różny od zera dla każdego t z przedziału $[a,b]$. Stąd wynika, że

$$\det\begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_1'(t) \\ \varphi_2(t) & \varphi_2'(t) \end{bmatrix} = 0, \quad t \in [a,b].$$

Zatem funkcje φ_1, φ_2 sa liniowo zależne.

Twierdzenie 2. Operator Sturma-Liouville'a spełnia nastepujące tożsamości:
(i) Lagrange'a
$$uL[v] - vL[u] = [p(uv' - vu')]'$$
(ii) Greena
$$\int_a^b (uL[v] - vL[u])\,dt = [p(uv' - vu')]|_a^b.$$

Dowód
(i)

$$uL[v] - vL[u] = u\left[\frac{d}{dt}\left(p\frac{dv}{dt}\right) + qv\right] - v\left[\frac{d}{dt}\left(p\frac{du}{dt}\right) + qu\right] = u\frac{d}{dt}\left(p\frac{dv}{dt}\right) - v\frac{d}{dt}\left(p\frac{du}{dt}\right)$$
$$= u\frac{d}{dt}\left(p\frac{dv}{dt}\right) + p\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} - v\frac{d}{dt}\left(p\frac{du}{dt}\right) - p\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[p\left(u\frac{dv}{dt} - v\frac{du}{dt}\right)\right].$$

(ii)

$$\int_a^b (uL[v] - vL[u])\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\left[p\left(u\frac{dv}{dt} - v\frac{du}{dt}\right)\right]dt = [p(uv' - vu')]|_a^b.$$

Twierdzenie 3 Wartości własne problmu Sturma-Liouville'a są rzeczywiste.
Dowód. Niech $\varphi_n(t)$ będzie funkcją własną odpowiadającą watrości własnej λ_n spełniającą równanie

$$L[\varphi_n] = -\lambda_n w(t)\varphi_n. \tag{4}$$

Wtedy funkcja $\bar{\varphi}_n$ jest funkcją własną odpowiadającą watrości własnej $\bar{\lambda}_n$ spełniającą równanie

$$L[\bar{\varphi}_n] = -\bar{\lambda}_n w(t)\bar{\varphi}_n. \tag{5}$$

(Kreska u góry oznacza sprzężenie dla liczb zespolonych)
Równanie (4) mnożymy przez $\bar{\varphi}_n$ a równanie (5) przez φ_n i odejmujemy od siebie stronami

$$\bar{\varphi}_n L[\varphi_n] - \varphi_n L[\bar{\varphi}_n] = (\bar{\lambda}_n - \lambda_n) w \varphi_n \bar{\varphi}_n.$$

Całkując obustronnie ostatnią równość otrzymamy

$$\int_a^b (\bar{\varphi}_n L[\varphi_n] - \varphi_n L[\bar{\varphi}_n])\,dt = (\bar{\lambda}_n - \lambda_n)\int_a^b w\varphi_n\bar{\varphi}_n dt.$$

Z tożsamości Greena mamy

$$(6) \qquad [\, p(\bar{\varphi}_n\varphi_n' - \varphi_n\bar{\varphi}_n')\,]\,|_a^b = (\bar{\lambda}_n - \lambda_n)\int_a^b w\varphi_n\bar{\varphi}_n dt.$$

Z warunków brzegowych mamy

$$\alpha_1\varphi_n(a) = -\alpha_2\varphi_n'(a), \quad \alpha_2\bar{\varphi}_n'(a) = -\alpha_1\bar{\varphi}_1(a)$$

mnożąc stronami powyższe równości otrzymamy

$$\alpha_1\alpha_2\varphi_n(a)\bar{\varphi}_n'(a) = \alpha_1\alpha_2\varphi_n'(a)\bar{\varphi}_1(a).$$

zatem

$$\varphi_n(a)\bar{\varphi}_n'(a) = \varphi_n'(a)\bar{\varphi}_1(a).$$

Analogicznie wykazuje się, że

$$\varphi_n(b)\bar{\varphi}_n'(b) = \varphi_n'(b)\bar{\varphi}_1(b).$$

Stąd wynika, że lewa strona równości (6) jest równa zero, więc

$$0 = (\bar{\lambda}_n - \lambda_n)\int_a^b w\varphi_n\bar{\varphi}_n dt = (\bar{\lambda}_n - \lambda_n)\int_a^b w|\varphi_n|^2 dt$$

stąd $\bar{\lambda}_n = \lambda_n$ co oznacza, że wartości własne są rzeczywiste.

Twierdzenie 4. Funkcje własne odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne i linowo niezależne.

Dowód. Niech $\varphi_n(t)$ będzie funkcją własną odpowiadającą watrości własnej λ_n

$$L[\varphi_n] = -\lambda_n w(t)\varphi_n$$

i niech $\varphi_m(t)$ będzie funkcją własną odpowiadającą watrości własnej λ_m

$$L[\varphi_m] = -\lambda_n w(t)\varphi_m.$$

Stąd

$$\varphi_m L[\varphi_n] - \varphi_n L[\varphi_m] = (\lambda_m - \lambda_n)w\varphi_n\varphi_m.$$

Całkując obustronnie powyższą równość otrzymamy

$$\int_a^b (\varphi_m L[\varphi_n] - \varphi_n L[\varphi_m])dt = (\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b w\varphi_n\varphi_m dt.$$

Analogicznie jak w twierdzeniu 3 pokazuje się, że lewa strona ostaniej zależności jest równa zero. Zatem

$$0 = (\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b w\varphi_n\varphi_m dt = (\lambda_m - \lambda_n) < \varphi_n, \varphi_m >_w .$$

Ponieważ $\lambda_n \neq \lambda_m$ więc iloczyn skalarny funkcji $\varphi_n(t)$, $\varphi_m(t)$ z wagą $w(t)$ jest równy zero

$$< \varphi_n(t), \varphi_m(t) >_w := \int_a^b w(t)\varphi_n(t)\varphi_m(t)dt = 0$$

co oznacza, że funkcje $\varphi_n(t)$, $\varphi_m(t)$ są ortogonalne.
Przypuśćmy, że funkcje $\varphi_n(t)$ i $\varphi_m(t)$ są liniowo zależne tj. istnieje $c \neq 0$ takie, że $\varphi_m(t) = c\varphi_n(t)$ wtedy

$$0 =< \varphi_n(t), \varphi_m(t) >_w = \int_a^b w(t)c\varphi_n^2(t)dt.$$

Ponieważ $w(t) > 0$ więc $\varphi_n(t) \equiv 0$ co jest sprzeczne z tym, że $\varphi_n(t)$ nie jest tożsamościowo równe zero, więc funkcje są liniowo niezależne.
Uwaga Iloraz Rayleigha
Mnożymy problem własny

$$L[\varphi_n] = -\lambda_n w(t)\varphi_n$$

przez funkcję własną φ_n i następnie obustronie całkujemy otrzymując

$$\int_a^b \left[\varphi_n \frac{d}{dt}\left(p\frac{d\varphi_n}{dt}\right) + q\varphi_n^2\right] dt = -\lambda_n \int_a^b w\varphi_n^2 dt$$

stąd

$$\lambda_n = \frac{-\int_a^b \left[\varphi_n \frac{d}{dt}\left(p\frac{d\varphi_n}{dt}\right) + q\varphi_n^2\right] dt}{\int_a^b w\varphi_n^2 dt}.$$

Najmniejsza wartość własna λ_1 jest równa

$$\lambda_1 = \min_{y(t)} \frac{-\int_a^b \left[y \frac{d}{dt}\left(p\frac{dy}{dt}\right) + qy^2\right] dt}{\int_a^b wy^2 dt}$$

gdzie mninimum jest wzięte po wszystkich funkcjach $y(t)$ które są różniczkowalne i spełniają warunki brzegowe nie muszą spełniać równania.

Twierdzenie 5. Regularne zagadnienie Sturma-Liouville'a ma następujące własności:
(i) Istnieje przeliczalna ilość wartości własnych $\{\lambda_n\}$
$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$
$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$.

(ii) Dla każdej wartości własnej λ_n istnieje funkcja własna φ_n która ma $n-1$ miejsc zerowych na przedziale (a,b)
(iii) Zbiór funkcji własnych $\{\varphi_n\}$ jest zupełny to znaczy dowolna funkcja kawałkami gładka taka, że

$$\int_a^b < f, f > dt < \infty$$

może być określona przez szereg Fouriera

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(t)$$

gdzie

$$c_n = \frac{< f, \varphi_n >}{< \varphi_n, \varphi_n >}.$$

Dowód tego twierdzenia pomijamy.
Przykład 1. Wyznaczyć rozwiązanie problemu własnego:

$$L[x] = (tx')' + \frac{2}{t}x = -\lambda w x, \quad x'(1) = 0 = x'(2). \tag{7}$$

Rozwiązanie Nieznana jest funkcja w którą należy wyznaczyć. Równanie z (7) można zapisać w postaci

$$tx'' + x' + \frac{2}{t}x = -\lambda w x. \tag{8}$$

Mnożymy obustronnie równanie (8) przez t otrzymamy:

$$t^2x'' + tx' + (2 + \lambda t w)x = 0. \tag{9}$$

Przyjmując $w(t) = \frac{1}{t}$ równanie (9) przyjmie postać równania Eulera

$$t^2x'' + tx' + (2 + \lambda)x = 0. \tag{10}$$

Równanie charakterystyczne dla równania (10) jest następujące

$$r^2 + \lambda + 2 = 0.$$

Równanie (10) z warunkami brzegowymi z (7) ma niezerowe rozwiązania jeżeli $\lambda + 2 > 0$. Dla tych λ rozwiazanie ogólne równania (10) ma postać

$$x(t) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda + 2}\ln|t|) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda + 2}\ln|t|).$$

Uwzględniając warunki brzegowe otrzymamy:

$$x'(1) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \quad \text{więc} \quad x(t) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda + 2} \ln t),$$

$$x'(2) = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda + 2} \ln 2) = 0.$$

Stąd wynika, że

$$\sqrt{\lambda + 2} \ln 2 = n\pi, \quad n = 0, 1 \ldots$$

Zatem wartości własne i funkcje własne dla tego problemu mają postać:

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(\ln 2)^2} - 2, \quad x_n(t) = \cos\left(\frac{n\pi}{\ln 2} \ln t\right), \quad 1 \leqslant t \leqslant 2.$$

Dla $\lambda = -2$ funkcja własna jest tożsamościowo równa dowolnej stałej która spełnia równanie (10).

Przykład 2. Wyznaczyć rozwiązanie następującego problemu brzegowego:

$$(tx')' + \frac{x}{t} = \frac{1}{t}, \quad t \in [1, e], \quad x(1) = 0 = x(e). \tag{11}$$

Powyższe równanie jest w postaci Sturma-Liouville'a. Wiemy, że problem własny Sturma-Liouville'a ma ortogonalny zbiór funkcji własnych aby go wyznaczyć musimy rozwiązać następujący problem własny:

$$(t\varphi')' + \frac{\varphi}{t} = -\lambda w \varphi, \quad \varphi(1) = \varphi(e) = 0. \tag{12}$$

Mnożymy równanie (12) przez t i otrzymujemy

$$t^2\varphi'' + t\varphi' + (1 + \lambda w t)\varphi = 0. \tag{13}$$

Przyjmując $w(t) = \frac{1}{t}$ równanie (13) przyjmie postać równania Eulera

$$t^2\varphi'' + t\varphi' + (1 + \lambda)\varphi = 0 \tag{14}$$

Równanie charakterystyczne dla równania (14) jest następujące

$$r^2 + \lambda + 1 = 0.$$

Równanie (14) z warunkami brzegowymi z (11) ma niezerowe rozwiązania jeżeli $\lambda + 1 > 0$. Dla tych λ rozwiazanie ogólne równania (14) ma postać

$$\varphi(t) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda + 1} \ln |t|) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda + 1} \ln |t|).$$

Uwzględniając warunki brzegowe otrzymamy:

$$\varphi(1) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \quad \text{więc} \quad \varphi(t) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda + 1} \ln t),$$

$$\varphi'(e) = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda + 1}) = 0.$$

Stąd wynika, że

$$\sqrt{\lambda + 1} = n\pi, \quad n = 1, 2 \ldots$$

Zatem wartości własne i funkcje własne dla tego problemu mają postać:

$$\lambda_n = n^2\pi^2 - 1, \quad \varphi_n(t) = A \sin(n\pi \ln t), \quad 1 \leqslant t \leqslant e.$$

Wygodnie jest znormalizować funkcje własne to znaczy dobrać A tak by norma φ_n była równa 1:

$$\begin{aligned} 1 =< \varphi_n, \varphi_n >_w &= \int_1^e (\varphi_n(t))^2 \frac{1}{t} dt = A^2 \int_1^e \sin^2(n\pi t) \frac{1}{t} dt = A^2 \int_0^1 \sin^2(n\pi\tau) d\tau \\ &= A^2 \int_0^1 \frac{1 - \cos(2n\pi\tau)}{2} d\tau = \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A^2 \frac{1}{2n\pi} \sin(2n\pi\tau)|_0^1 = \frac{1}{2}A^2. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że należy przyjąć $A = \sqrt{2}$.
Wracając do problemu (11)

$$L[x] = \frac{1}{t}.$$

Nieznane rozwiązanie naszego problemu przedstawimy w postaci szereu którego wyrazami są funkcje własne:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi \ln t).$$

Podstawiając funkcje $x(t)$ do równania (11) otrzymamy

$$\frac{1}{t} = L[x] = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n \sqrt{2} \sin(n\pi \ln t) \frac{1}{t}.$$

Do wyznaczenia współczynników c_n wykorzystamy ortogonalność funkcji własnych. Mnożymy obie strony powyższego równania przez $\varphi_m(t) = \sqrt{2}\sin(m\pi \ln t)$ i otrzymamy

$$\frac{1}{t}\sqrt{2}\sin(m\pi \ln t) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n \sqrt{2} \sin(m\pi \ln t)\sqrt{2}\sin(n\pi \ln t)\frac{1}{t}.$$

Całkując obustronie powyższą równość i uwzględniając ortogonalność funkcji własnych $n \neq m$ to $< \varphi_n, \varphi_m >_w = 0$ otrzymamy

$$\int_1^e \frac{1}{t}\sqrt{2}\sin(m\pi \ln t) dt = -2c_m \lambda_m \int_1^e \sin^2(m\pi \ln t)\frac{1}{t} dt.$$

Dokonując zmiany zmiennych w całkach $\tau = \ln t$ otrzymamy

$$\int_0^1 \sqrt{2}\sin(m\pi\tau)d\tau = -2c_m\lambda_m \int_0^1 \sin^2(m\pi\tau)d\tau.$$

Uwzgledniając, że

$$\int_0^1 \sin^2(m\pi\tau)d\tau = \frac{1}{m\pi}(1-(-1)^m), \quad \int_0^1 \sin^2(m\pi\tau)d\tau = \frac{1}{2}$$

dostajemy zaleznośc:

$$\sqrt{2}\frac{1}{m\pi}(1-(-1)^m) = -2c_m\lambda_m\frac{1}{2}$$

stąd uwzględniając $\lambda_m = m^2\pi^2 - 1$ otrzymujemy

$$c_m = \frac{[1-(-1)^m]\sqrt{2}}{m\pi(m^2\pi^2-1)}.$$

Zatem rozwiązanie problemu (11) ma postać

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[1-(-1)^m]}{m\pi(m^2\pi^2-1)} \sin(n\pi \ln t).$$