

## Zadania na zastosowanie równań różniczkowych.

### Zadanie 1

#### Odptyw płynu z naczynia.

Naczynie jest wypełnione cieczą do poziomu  $H$ . Niech  $S$  będzie znanym obszarem przekroju poprzecznego zadany funkcją zależną od wysokości  $h$ , tj.  $S = S(h)$ . W dolnej części naczynia znajduje się otwór o polu powierzchni  $w$ , przez który płyn wypływa. Określić czas  $t$ , po którym poziom cieczy spadnie od początkowej wysokości  $H$  do wysokości  $h$  oraz czasu  $T$  całkowitego opróżnienia naczynia, biorąc pod uwagę, że znana jest szybkość  $v$  zmiany ilości (objętości) płynu w naczyniu która określona jest funkcją  $v = v(h)$ .

### Zadanie 2

#### Problem wzrostu populacji.

Zakładamy, że tempo wzrostu populacji jest wprost proporcjonalne do liczby ludności. Znajdź związek między populacją  $P$  i czasem  $t$ , jeśli wiadomo, że w pewnym momencie przyjęta jako początkową liczbę ludności równa  $P_0$ , a rok później liczba ludności wzrosła o  $x$  procent.

### Zadanie 3

Znajdź równanie krzywej, która ma odcinek odcięty przez styczną na osi  $Y$ , równy połowie sumy współrzędnych punktu styczności.

### Zadanie 4

20 litrowy pojemnik zawiera powietrze (80% azotu i 20% tlenu). Do naczynia wpływa 0,1 litra azotu na sekundę, zakładamy, że azot rozprzodza się w naczyniu równomiernie i błyskawicznie. Po jakim czasie będzie w naczyniu 99% azotu?

### Zadanie 5

W zbiorniku znajduje się 100 litrów roztworu zawierającego 10 kg soli. Woda jest stale wlewana do zbiornika (5 litrów na minutę), który jest mieszany z istniejącym rozwiązaniem. Mieszanina wypływa w takiej samej ilości na minutę. Ile soli pozostanie w zbiorniku po godzinie godziny?

### Zadanie 6

Po wyłączeniu silnika łódź zwalnia pod działaniem oporu wody, który jest proporcjonalny do prędkości łodzi. Początkowa prędkość łodzi  $v_0 = 2\text{ m/s}$ , po 4 s jej prędkość wynosiła 1 m/s. Po jakim czasie łódź będzie miała prędkość 0,25 m/s?

### Zadanie 7

Spadochroniarz skoczył z wysokości 1,5 km i otworzył się spadochron na

wysokości 0,5 km. Jak długo trwało to spadnięcie do otwarcia spadochronu? Opór powietrza jest proporcjonalny do kwadratu prędkości. (Zakładamy, że przyspieszenie grawitacyjne wynosi  $10m/s^2$ .)

### Zadanie 8

Po jakim czasie cała woda wypłynie z pionowego cylindrycznego zbiornika o średnicy  $2R = 1,8$  m i wysokości  $H = 2,45$  m przez otwór w dnie o średnicy  $2r = 6$  cm? Zakładamy, że woda wypływa ze zbiornika z szybkością równą  $k\sqrt{2gh}$ , gdzie  $g = 10m/s^2$  to przyspieszenie ziemskie,  $h$  to wysokość poziomu wody nad otworem, a  $k$  jest trochę bezwymiarowa współczynnik empiryczny równy 0,6 dla wody.

### Zadanie 9

Ciało w ciągu 10 minut ochłodziło się od  $100^\circ C$  do  $60^\circ C$ . Temperatura otoczenia wynosi  $20^\circ C$ . Po jakim czasie ostygnie do  $30^\circ C$ ? (Zakładamy, że tempo chłodzenia ciała jest proporcjonalne do różnicy temperatury ciała i otoczenia.)

### Zadanie 10

Absorpcja strumienia światła w cienkiej warstwie wody jest proporcjonalna do grubości warstwy i strumienia padającego na jej powierzchnię. Podczas przechodzenia przez warstwę 1 m grubości wchłonęło się  $1/4$  oryginalnego strumienia świetlnego. Jaka część światła osiąga głębokość 3 m?

### Zadanie 11

Znajdź równania krzywych, których suma długości normalnej i podnormalnej ma stałą wartość równą  $a$ .

### Zadanie 12

Problem wzrostu populacji. Tempo wzrostu populacji jest wprost proporcjonalne do liczby ludności. Znajdź związek między populacją  $P$  i czasem  $t$ , jeśli wiadomo, że w pewnym momencie przyjętym jako moment początkowy, liczba ludności była równa  $P_0$ , a rok później wzrosła o  $a$  - procent.

### Zadanie 13

Znajdź równanie krzywej, która ma odcinek odcięty przez styczną na osi  $Y$ , równy połowie sumy współrzędnych punktu styczności.

### Zadanie 14

Lejek ma kształt stożka o promieniu  $R = 6$  cm i wysokości  $H = 10$  cm i jest zwrócony w dół. Po jakim czasie cała woda wypłynie z lejka przez okrągłą średnicę otworu 0,5 cm na dole stożka? (Zakładamy, że woda wypływa z prędkością  $0.6\sqrt{2gh}$  gdzie  $g = 10m/s^2$  jest przyspieszeniem grawitacyjnym, a  $h$  jest wysokością poziomu wody nad otworem).

**Zadanie 15**

Napełniony, stulitrowy zbiornik z wodą w której rozpuszczono 2 kg soli. Do zbiornika jedną rurką wpływa czysta woda z prędkością 5 litrów na minutę, a drugą wypływa mieszanina z tą samą prędkością. Wyznacz ilość soli w zbiorniku w zależności od czasu. Przyjmij, że proces mieszania cieczy jest natychmiastowy.

**Zadanie 16**

Pewna krzywa na płaszczyźnie  $Oxy$  przecina oś rzędnych w punkcie  $(0, 1)$ . W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią  $Ox$  a styczną jest równy podwojonej rzędnej punktu styczności. Wyznacz równanie tej krzywej.

**Zadanie 17**

Pewna krzywa na płaszczyźnie  $Oxy$  przecina oś odciętych w punkcie  $(1, 0)$ . W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią  $Ox$  a styczną jest równy rzędnej punktu styczności, pomniejszonej o 4. Wyznacz równanie tej krzywej.

**Zadanie 18**

Pewna krzywa na płaszczyźnie  $Oxy$  przecina oś rzędnych w punkcie  $(0, 3)$ . W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią  $Ox$  a styczną jest równy różnicy rzędnej i odciętej punktu styczności. Wyznacz równanie tej krzywej.

**Zadanie 19**

Pewna krzywa na płaszczyźnie  $Oxy$  przechodzi przez środek układu współrzędnych. W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią  $Ox$  a styczną jest równy sumie rzędnej i podniesionej do kwadratu odciętej punktu styczności. Wyznacz równanie tej krzywej.

**Zadanie 20**

Prędkość rozpadu pierwiastka proeniotwórczego jest proporcjonalna do masy substancji, która w danej chwili się jeszcze nie rozpadła. Wyznaczyć zależność masy pierwiastka od czasu.

**Zadanie 21**

Po upływie 5 lat ze 100 g substancji radioaktywnej pozostało 25 g. Jaki jest czas połowicznego rozpadu tej substancji?

**Zadanie 22**

Znaleźć krzywe, dla których długość odcinka, jaki styczna poprowadzona w dowolnym punkcie krzywej odcina na osi  $Oy$ , jest równa odległości punktu styczności od początku układu współrzędnych.

**Zadanie 23**

Znaleźć krzywe, dla których długość odcinka, jaki styczna poprowadzona w dowolnym punkcie krzywej odcina na osi  $Oy$ , jest równa kwadratowi rzędnej punktu styczności.

**Zadanie 24**

Znaleźć równanie krzywej przechodzącej przez punkt  $(2,2)$ , dla której pole trójkąta utworzonego przez oś  $Ox$ , styczną i wektor wodzący punktu styczności jest stałe i równa się 2.

**Zadanie 25**

W obwodzie elektrycznym szeregowo połączono opornik o oporności  $R$ , cewkę o indukcyjności  $L$  oraz zewnętrzną siłę elektromotoryczną  $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$ . Wyznaczyć natężenie prądu  $i(t)$  w tym obwodzie, jeżeli  $i(0) = 0$ .

**Zadanie 26**

Krzywa  $y = y(x)$  przechodzi przez początek układu współrzędnych i leży w górnej półpłaszczyźnie. Każdy prostokąt ograniczony osiami układu współrzędnych i prostymi poprowadzonymi z dowolnego punktu  $(x, y(x))$  krzywej prostopadłymi do nich krzywa  $y(x)$  dzieli na dwie części. Pole zawarte pod krzywą  $y(x)$  jest dwa razy mniejsze niż pole nad krzywą. Wyznaczyć równanie tej krzywej.

**Zadanie 27**

Einstein-253 rozpada się z predkością proporcjonalną do masy substancji, która w danej chwili jeszcze się nie rozpadła. Określić okres połowicznego rozpadu  $\tau$ , jeśli materiał ten traci jedną trzecią swojej masy w ciągu 11.7 dni.

**Zadanie 28**

Założmy, że w zamkniętym pojemniku początkowo znajdowało się 100 mg toru-234, do pojemnika ze stałą szybkością 1 mg na dzień dodaje się toru-234.

(a) Określ masę  $m(t)$  toru - 234 w pojemniku w dowolnym momencie  $t$ , biorąc pod uwagę, że jego okres połowicznego zaniku wynosi 24.1 dni.

(b) Oblicz  $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t)$ .

(c) Jeśli tor-234 jest dodawany do pojemnika w wysokości  $k$  mg / dzień, znajdź wartość  $k$ , która jest wymagana przy utrzymaniu stałego poziomu 100 mg toru-234 w pojemniku.

**Zadanie 29**

Zbiornik początkowo zawiera 120 litrów czystej wody. Mieszanina zawierająca 25 gramów soli w 1-litrze wlewana jest do zbiornika z predkością 2 litrów

/ min, błyskawicznie wymieszana mieszanina opuszcza zbiornik z tą samą prędkością. Znajdź wyrażenie określające masę  $m(t)$  soli w zbiorniku w dowolnym czasie  $t$ .

Ponadto oblicz  $\lim_{t \rightarrow \infty} m(t)$ .

### Zadanie 30

Zbiornik otwarty od góry ma podstawę o powierzchni 1 metra kwadratowego i wysokości 2 metrów. Zbiornik jest początkowo pusty, gdy woda zaczyna wlewać się do niego z prędkością 7 litrów na minutę. W tym samym czasie woda wypływa również ze zbiornika przez otwór w dnie z prędkością  $5\sqrt{h}$  litrów na minutę, gdzie  $h$  to wysokość wody w zbiorniku w metrach. Czy woda wypełni zbiornik do samej góry, jeśli tak to po jakim czasie?

### Zadanie 31

Próbka nieznanego izotopu promieniotwórczego początkowo waży 5,00 g. Rok później masa spadła do 4,27 g. (a) Jak szybko maleje masa izotopu w zależności od czasu?

(b) Jaki jest okres połowicznego rozpadu izotopu?

### Zadanie 32

Butelka wody o temperaturze początkowej  $25^\circ C$  umieszczona w lodówce o temperaturze wewnętrznej  $5^\circ C$ . Biorąc pod uwagę, że temperatura wody wynosiła  $20^\circ C$  dziesięć minut po umieszczeniu w lodówce, jaka będzie temperatura wody po godzinie?

### Zadanie 33

Podczas reakcji chemicznej substancja A ulega przemianie do substancji B z prędkością proporcjonalną do kwadratu ilości A. W momencie początkowym mamy 60 gramów substancji A, a po 1 godzinie tylko 10 gramów substancji A nie uległo przemianie. Określ zależność substancji A w zależności od czasu. Ile będzie substancji A po 2 godzinach?

### Zadanie 34

Stopa wzrostu inwestycji jest proporcjonalna do wartości inwestycji w dowolnym momencie  $t$ . Inwestycja w wysokości 2000 USD wzrasta do wartości 2983,65 USD w ciągu 5 lat. Znajdź jej wartość po 10 latach.

### Zadanie 35

Wyznaczyć czas, po którym woda wypełniająca półkulisty pojemnik o średnicy 1m wypłynie z niego przez otwór o średnicy 0.1m który znajduje się w jego dnie, jeżeli predkość wypływu wody  $v = 0.6\sqrt{2gh} \text{ cm/s}$ , przy czym  $h$  jest wysokością słupa wody nad otworem, a  $g$  - oznacza przyspieszenie grawitacyjne.

**Zadanie 36**

Znaleźć krzywą, której styczne tworzą z osiami układu współrzędnych trójkąt o powierzchni  $2a^2$ .

**Zadanie 37**

Znaleźć krzywą o tej własności, że w dowolnym jej punkcie współczynnik kierunkowy stycznej jest równy stosunkowi rzędnej do odciętej punktu styczności wziętej ze znakiem przeciwnym.

**Zadanie 38**

Krzywa  $y(x)$  przechodzi przez punkt  $(0, 1)$  i ma tę własność, że w każdym jej punkcie współczynnik kierunkowy stycznej do tej krzywej jest równy podwojonemu iloczynowi współrzędnych punktu styczności. Znaleźć tę krzywą.

**Zadanie 39**

Znaleźć krzywe o tej własności, że pole trapezu, ograniczonego osiami układu, styczną i prostą równoległą do osi odciętej przechodzącą przez punktu styczności jest wielkością stałą równą  $3a^2$ .

**Zadanie 40**

Znaleźć krzywe o tej własności, że pole trapezu, ograniczonego osiami układu, styczną i prostą równoległą do osi rzędnych przechodzącą przez punktu styczności jest wielkością stałą równą  $3a^2$ .

**Zadanie 41**

Znaleźć krzywą o tej własności, że pole trójkąta ograniczonego styczną osią odciętych i odcinkiem od początku układu współrzędnych do punktu styczności jest wielkością stałą równą  $a^2$ .

**Zadanie 42**

Znaleźć krzywą o tej własności, że dla każdej normalnej odcinek leżący na niej o końcach na krzywej i osi  $Ox$  ma długość 1.

**Zadanie 43**

Znaleźć krzywą przechodzącą przez punkt  $(0, -4)$  o tej własności, że współczynnik kierunkowy stycznej do tej krzywej w każdym jej punkcie jest równy rzędnej tego punktu powiększonej o 3.

**Zadanie 44**

Znaleźć krzywą przechodzącą przez początek układu współrzędnych o tej własności, że środek normalnej od dowolnego punktu na krzywej do osi  $Ox$  leży na paraboli  $y = ax^2$ .

**Zadanie 45**

Znaleźć krzywą o tej własności, że odcinek odcięty na osi  $Oy$  przez styczną w dowolnym punkcie krzywej jest równy połowie sumy współrzędnych tego punktu.

**Zadanie 46**

Znaleźć krzywą o tej własności, że odcinek odcięty na osi  $Oy$  przez styczną w dowolnym punkcie krzywej jest równy kwadratowi odciętej tego punktu.

**Zadanie 47**

W dowolnym momencie  $t$ , tempo wzrostu populacji  $y(t)$  jeleni w parku stanowym jest proporcjonalny do iloczynu  $y(t)$  i  $M - y(t)$  gdzie  $M = 600$  jest maksymalną liczbą jeleni jaka może żyć w parku. W momencie początkowym liczba jeleni wynosiła 100 sztuk a po czterech latach wzrosła do 200 sztuk. Wyznaczyć funkcję  $y(t)$  określającą liczbę jeleni w zależności od czasu.

**Zadanie 48****Model rozwoju populacji Gompertza.**

Model ten zakłada, że szypkość przyrostu populacji jest proporcjonalna do liczebności populacji w danym momencie  $y(t)$  i  $\ln\left(\frac{M}{y(t)}\right)$  gdzie  $M$  - graniczna liczebność populacji.

W pewnym regionie gdzie dotychczas nie było królików przywieziono 50 królików. Szacuje się, że maksymalna populacja królików jaka może być w tym regionie wynosi 600 sztuk. Po 1 roku, populacja królików wynosiła 100 sztuk. Jeśli populacja będzie się rozwijać zgodnie z modelem wzrostu Gompertza to ile królików będzie po 3 latach?

**Zadanie 49**

Pewna krzywa na płaszczyźnie  $Oxy$  przecina oś rzędnych w punkcie  $(0, 3)$ . W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią  $Ox$  a styczną jest równy różnicy rzędnej i odciętej punktu styczności. Wyznacz równanie tej krzywej.

**Zadanie 50**

Pewna krzywa na płaszczyźnie  $Oxy$  przechodzi przez środek układu współrzędnych. W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią  $Ox$  a styczną jest równy sumie rzędnej i podniesionej do kwadratu odciętej punktu styczności. Wyznacz równanie tej krzywej.

**Zadanie 51**

W zbiorniku o pojemności 500 litrów w momencie początkowym jest  $V_0 = 200$  litrów roztworu wodnego w którym rozpuszczono 100 gramów soli. Roztwór soli zawierający 1 gram soli w litrze, wtłaczany jest do zbiornika z prędkością

3 litrów na minute i momentalnie jest wymieszany z pozostałą cieczą. W tym samym czasie z prędkością 2 litrów na minute upuszczana jest ciecz ze zbiornika. Określić ilość soli w zbiorniku gdy zbiornik będzie pełny.

### Zadanie 52

Radioaktywny materiał w momencie początkowym miał masę 50 miligramów. Po 1 godzinie stracił 80% swojej masy.

- Wyznaczyć zależność masy materiału od czasu.
- Wyznaczyć masę materiału po 4 godzinach.
- Wyznaczyć czas połowicznego rozkładu.

### Zadanie 53

Mały pokój o objętości 1000 litrów zawiera 40% tlenu. Powietrze jest filtrowane z prędkością 10 litrów na sekundę i wraca do pokoju z zawartością 10% tlenu. Zakładamy, że powietrze jest natychmiast mieszane. Określić czas po jakim powietrze w pokoju będzie zawierało 20% tlenu.

### Zadanie 54

Zbiornik otwarty od góry, którego ściany są prostopadłe do podstawy ma pole podstawy  $1\text{ m}^2$  i wysokość  $2\text{ m}$ . W momencie początkowym zbiornik jest pusty. Do zbiornika wlewana jest ciecz z prędkością 7 litrów na minute. W dnie zbiornika jest mały otwór przez który wylewa się ciecz ze zbiornika. Prędkość z jaką wylewa się ciecz wynosi  $5\sqrt{h}$  - litrów na minute gdzie  $h$  - wysokość słupa cieczy w zbiorniku. Po jakim czasie zbiornik będzie napełniony do pełna.

### Zadanie 55

Spadochroniarz skoczył z wysokości 1,5 km i otworzył się spadochron na wysokości 0,5 km. Jak długo trwało to spadnięcie do otwarcia spadochronu? Opór powietrze jest proporcjonalne do kwadratu prędkości. (Zakładamy, że przyspieszenie grawitacyjne wynosi  $10\text{ m/s}^2$ .)

### Zadanie 56

Po jakim czasie cała woda wypłynie z pionowego cylindrycznego zbiornika o średnicy  $2R = 1,8\text{ m}$  i wysokości  $H = 2,45\text{ m}$  przez otwór w dnie o średnicy  $2r = 6\text{ cm}$ ? Zakładamy, że woda wypływa ze zbiornika z szybkością równą  $k\sqrt{2gh}$ , gdzie  $g = 10\text{ m/s}^2$  to przyspieszenie ziemskie,  $h$  to wysokość poziomu wody nad otworem, a  $k$  jest trochę bezwymiarowa współczynnik empiryczny równy 0,6 dla wody.

### Zadanie 57

W zbiorniku znajduje się 100 litrów roztworu zawierającego 10 kg soli. Woda jest stale wlewana do zbiornika (5 litrów na minutę), który jest mieszany z istniejącym rozwiązaniem. Mieszanina wypływa w takiej samej ilości na minute. Ile soli pozostanie w zbiorniku po godzinie?



**Zadanie 58**

Po wyłączeniu silnika łódź zwalnia pod działaniem oporu wody, który jest proporcjonalny do prędkości łodzi. Początkowa prędkość łodzi  $v_0 = 2\text{ m/s}$ , po 4 s jej prędkość wynosiła 1 m/s. Po jakim czasie łódź będzie miała prędkość 0,25 m/s?

**Zadanie 59**

Wyznaczyć równanie krzywej o tej własności, że styczna w każdym punkcie krzywej tworzy z osiami układu trójkąt o polu  $2a^2$ .

**Zadanie 60**

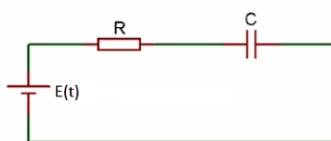
Wyznaczyć równanie krzywej przechodzącej przez początek układu o tej własności, że w każdym punkcie krzywej odcinek normalnej odcięty osiami pierwszej ćwiartki układu współrzędnych ma długość równą 2.

**Zadanie 61**

Wyznaczyć równanie krzywej o tej własności, że styczna w każdym punkcie krzywej odcina na osiach układu odcinki, że suma odwrotności kwadratów długości tych odcinków jest równa 1.

**Zadanie 62**

W obwodzie elektrycznym szeregowo połączono opornik o oporności  $R = 10\text{ k}\Omega$ , kondensator o pojemności  $C = 10\text{ }\mu\text{F}$  oraz siłę elektromotoryczną  $E(t) = 15\text{ V}$ . Wyznaczyć napięcie na kondensatorze  $V(t)$  w zależności od czasu  $t$ , jeżeli  $V(0) = 0$ .

**Zadanie 63**

W łódce przy prędkości 1,5m/s wyłączono silnik. Łódka zwalnia pod wpływem siły oporu wody która jest proporcjonalna do prędkości łódki. Po 4 sekundach prędkość łódki zmniejszyła się do 1m/s. Po jakim czasie prędkość łódki zmniejszy się do 0,2m/s ? Jaką odległość przebędzie łódka do zatrzymania?

**Zadanie 64**

Skoczek spadochronowy spada z wysokości 1,5km a otworzył spadochron na wysokości 0,5km. Ile czasu opadał do otwarcia spadochronu? Wiadomo, że w powietrzu graniczna prędkość z jaką opada człowiek wynosi 50m/s. Należy przyjąć, że opór powietrza jest proporcjonalny do kwadratu prędkości.

**Zadanie 65**

Piłka upuszczona z wysokości 16,3m bez prędkości początkowej. Należy przyjąć, że siła oporu powietrza jest proporcjonalna do kwadratu prędkości i przy prędkości 1m/s wynosi 0,0047 N. Z jaką prędkością piłka uderzy o ziemię?

**Zadanie 66**

Beczka o kształcie walca o wysokości  $H=2\text{m}$  i średnicy  $2R=1,6\text{m}$  wypełniona jest wodą. Beczka jest położona poziomo. W najniższym punkcie beczki jest otwór o średnicy  $2r=6\text{cm}$  przez który wylewa się woda z prędkością  $v = 0,6\sqrt{2gh}$  gdzie  $g$ - przyspieszenie ziemskie,  $h$ - wysokość słupa wody nad otworem. Obliczyć czas po którym beczka będzie opróżniona.

**Zadanie 67**

Beczka o kształcie walca postawiona pionowo ma w dnie otwór przez który wylewa się woda. Połowa wody z pełnej beczki wylała się w ciągu 5 minut. Za jaki czas wyleje się cała woda?

**Zadanie 68**

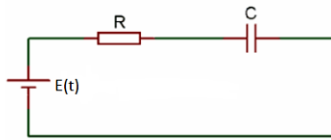
Zbiornik w kształcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ściętego o boku większej podstawy 1m i mniejszej o boku 0,5m i wysokości 1m zawiera w dnie (którym jest większa podstawa) otwór o powierzchni  $3\text{cm}^2$ . Do zbiornika wlewana jest woda z prędkością 3 litrów na sekund. Po jakim czasie zbiornik zostanie napełniony?

**Zadanie 69**

Masa rakiety z pełnym zapasem paliwa wynosi  $M$  a bez paliwa  $m$  a prędkość wylatujących gazów z rakiety  $v_g$ . W momencie początkowym prędkość wynosi zero. Wyznaczyć zależność prędkości rakiety od zużytego paliwa?

**Zadanie 70**

W obwodzie elektrycznym szeregowo połączono opornik o oporności  $R$ , kondensator o pojemności  $C$  oraz siłę elektromotoryczną  $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$ . Wyznaczyć natężenie prądu  $i(t)$  w obwodzie w zależności od czasu  $t$ , jeżeli  $i(0) = 0$ .



### Zadanie 71

Znaleźć krzywe dla których w dowolnym punkcie promień krzywizny jest dwa razy większy od odcinka normalnej między punktem na krzywej a osią odciętych. Rozpatrzeć osobno przypadek kiedy funkcja jest wypukła  $y'' > 0$  i osobno przypadek kiedy jest wklęsła  $y'' < 0$ .

Wzór na promień krzywizny krzywej  $y(x)$

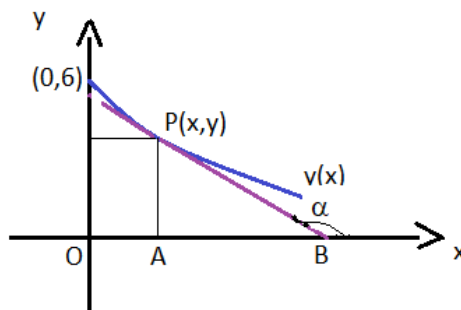
$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

### Zadanie 72

Znaleźć krzywą dla której promień krzywizny jest odwrotnie proporcjonalny do kosinusa kąta między styczną a osią odciętych.

### Zadanie 73

Narciarz wodny jest ciągniony za pomocą liny o długości 6m przymocowanej do końca łodzi. Łódź porusza się wzdłuż osi  $x$  ze stałą prędkością a lina jest zawsze napięta. Początkowo łódź jest w punkcie  $O$  a narciarz w  $(0, 6)$ . Wyznaczyć równanie krzywej  $y(x)$  po której porusza się narciarz. Na poniższym rysunku punkt  $P$  przedstawia położenie narciarza a  $B$  łodzi. Odcinek  $|PB| = 6m$  i jest styczny do szukanej krzywej.

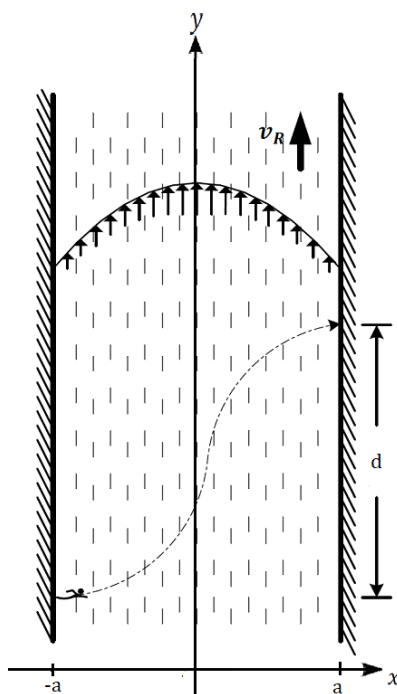


**Zadanie 74**

W rzece o szerokości  $2a$  prędkość prądu rzeki jest największa na środku i maleje do zera przy brzegu, jest zadana wzorem

$$v_R = v_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

gdzie  $v_0$  - prędkość na środku. Pływak płynie prostopadłe do przeciwnego brzegu z prędkością  $v_s$ . Wyznaczyć równanie krzywej  $y(x)$  po której płynie pływak?

**Zadanie 75**

Wyznaczyć równanie krzywej o tej własności, że długość krzywej liczona od punktu  $(0, 1)$  do dowolnego punktu na krzywej jest równa tangensowi kąta jaki tworzy styczna do krzywej w tym punkcie z osią  $Ox$ .

**Zadanie 76**

Określić prędkość z jaką uderzy w ziemię meteoryt. Zakładamy, że porusza się po linii prostej prostopadłej do powierzchni ziemi i jego przyspieszenie jest proporcjonalne do odwrotności kwadratu odległości od środka ziemi.

**Zadanie 77**

Znaleźć równanie krzywej o tej własności, że promień krzywizny jest proporcjonalny do długości normalnej.

Promień krzywizny krzywej  $y(x)$  określony jest wzorem

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

Długość normalnej jest to długość odcinka na normalnej do krzywej, łączącego punkt na krzywej z punktem przecięcia normalnej z osią  $Ox$ .

**Zadanie 78**

Znaleźć równanie krzywej o tej własności, że promień krzywizny jest równy 2.

Promień krzywizny krzywej  $y(x)$  określony jest wzorem

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

**Zadanie 79**

Znaleźć równanie krzywej o tej własności, że rzut promienia krzywizny na oś  $Oy$  jest równy 2 a oś  $Ox$  jest styczna do krzywej w początku układu współrzędnych.

Promień krzywizny krzywej  $y(x)$  określony jest wzorem

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

**Zadanie 80**

Znaleźć równanie krzywej o tej własności, że promień krzywizny jest równy sześciątej długości normalnej. Ponadto szukana krzywa przechodzi przez punkt  $(0, 1)$  i styczna do krzywej w tym punkcie tworzy z osią  $Ox$  kąt  $45^\circ$ .

Promień krzywizny krzywej  $y(x)$  określony jest wzorem

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

Długość normalnej jest to długość odcinka na normalnej do krzywej, łączącego punkt na krzywej z punktem przecięcia normalnej z osią  $Ox$ .