Równanie Lagrange'a, Clairauta i Ricattiego

Równanie Lagrange'a jest równaniem różniczkowym pierwszego rzędu, liniowym w odniesieniu do x i y, których współczynniki są funkcjami y'

$$P(y')x + Q(y')y + R(y') = 0$$

Równanie Lagrange'a rozwiązuje się w następujący sposób. Rozwiązujemy go ze względu na y przyjmując za parametr y'. Wprowadzając oznaczenie $y' = p$ dostaniemy

$$y = xf(p) + g(p),$$

gdzie

$$f(p) = -\frac{P(p)}{Q(p)}, \qquad g(p) = -\frac{R(p)}{Q(p)}.$$

Różniczkując otrzymane równanie i uwzględniając, że $dy = y'dx = pdx$ otrzymamy

$$pdx = f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp,$$

jest to równanie liniowe ze wzgledu na x jako funkcja p

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p}x = \frac{g'(p)}{p - f(p)}.$$

Jeśli rozwiązanie tego równania jest $x = F(p, C)$ to ogólne rozwiązanie tego równania zapiszemy w postaci

$$\begin{aligned} &x = F(p, C), \\ &y = xf(p) + g(p) = F(p, C)f(p) + g(p). \end{aligned}$$

Równaniem Clairauta nazywamy równanie postaci:

$$y = xy' + g(y'),$$

gdzie g jest funkcją różniczkowalną.

Równanie to jest szczególnym przypadekiem równania Lagrange'a. Jeżeli zróżniczkujemy powyższe równanie ze wzgledu na x to otrzymamy

$$y' = y' + xy'' + g'(y')y'',$$

po uproszczeniu otrzymamy równość

$$y''(x + g'(y')) = 0.$$

Stąd przyjmując $p = y'$ otrzymamy dwa rozwiązania

$$p' = 0 \quad \text{lub} \quad x = -g'(p).$$

W pierwszym przypadku W drugim przypadku $x = -g'(p)$ rozwiązanie w parametrycznej formie można wyrazić w postaci układu

$$\begin{aligned} x + g'(p) &= 0, \\ y &= xp + g(p). \end{aligned}$$

Jeżeli $g'' \neq 0$ to rozwiązanie drugie nazywamy osobliwym ponieważ nie należy do rodziny rozwiązań pierwszego przypadku.

Przykład 1.

Rozwiązać równanie

$$y = y'^2(x+1).$$

Rozwiązanie

Jest to równanie Lagrange'a kładąc $p = y'$ otrzymamy $y = p^2(x+1)$. Różniczkując ostatnie równanie ze wzgledu na x otrzymamy

$$y' = 2pp'(x+1) + p^2.$$

Uwzględniając, że $y' = p$ równanie możemy zapisać

$$p = 2pp'(x+1) + p^2,$$

stąd po wyciągnięciu p przed nawias mamy

$$p\left(2p'(x+1) + p - 1\right) = 0.$$

Stąd wynika, że

$$p = 0 \quad \text{lub} \quad 2p'(x+1) + p - 1 = 0.$$

Z pierwszej zależności $p = y' = 0$ wynika $y(x) \equiv C$, gdzie C jest stałą. Druga zalężność jest równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych gdzie po rozdzieleniu zmiennych otrzymamy

$$\frac{dx}{x+1} = \frac{2dp}{1-p}.$$

Całkując obustronie powyższe równanie otrzymamy

$$\ln|x+1| = -2\ln|1-p| + \ln C_1,$$

stąd po opuszczeniu logarytmów otrzymujemy

$$x = -1 + \frac{C_1}{(1-p)^2}, \quad \text{gdzie} \quad C_1 \neq 0 \quad \text{jest stałą.}$$

Zatem rozwiązanie ogólne naszego równania w postaci parametrycznej ma postać

$$\begin{aligned} x &= -1 + \tfrac{C_1}{(1-p)^2}, \\ y &= \tfrac{C_1 p^2}{(1-p)^2}, \end{aligned}$$

a $y(x) \equiv C$, jest rozwiązaniem osobliwym.

W naszym przypadku parametr p można wyrugować i dostajemy rozwiązanie ogólne naszego równania w postaci

$$(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 = |C_1|.$$

Przykład 2.

Rozwiązać równanie

$$y = xy' - e^{y'}.$$

Rozwiązanie Jest to równanie Clairauta. Jeżeli $p = y'$, wtedy

$$y = xp - e^p.$$

Różniczkując powyższe równanie ze wzgledu na x i uwzględniając, że $p = y'$ otrzymamy

$$p = p + xp' - e^p p'.$$

Po uproszczeniu mamy

$$p'\,(x - e^p) = 0.$$

Stąd $p' = 0$, czyli $p = C$ lub $x = e^p$. Jeśli przyjmiemy, że $p = C$ to otrzymamy rozwiązanie ogólne postaci

$$y = Cx - e^C \quad \text{gdzie} \quad C \quad \text{dowolnastała.}$$

Jeśli przyjmiemy, że $x = e^p$ to $y = e^p(p-1)$ i otrzymamy rozwiązanie osobliwe w postaci parametrycznej

$$\begin{aligned} x &= e^p, \\ y &= e^p(p-1). \end{aligned}$$

Rugując w powyższym układzie p otrzymamy jawną postać rozwiązania osobliwego

$$y = x(\ln x - 1).$$

Równanie Ricattiego

Równaniem Ricattiego nazywamy równanie postaci

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2, \tag{1}$$

gdzie funkcje $P(x)$, $Q(x)$ i $R(x)$ są ciągłe w danym przedziale (a, b). Z twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności dla równań rózniczkowych rzedu pierwszego przez każdy punk $(x_0, y_0) \in (a, b) \times \mathcal{R}$ przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie równania (1).

Nie istnieje ogólny sposób analitycznego scałkowania równania Riccatiego. Chcąc znaleźć rozwiązanie ogólne równania Ricattiego należy odgadnąć rozwiązanie szczególne y_1 i szukać rozwiązania ogólnego w postaci

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}.$$

Podstawiając $y(x)$ do równania (1) otrzymamy

$$y_1' - \frac{1}{u^2}u' = P(x) + Q(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) + R(x)\left(y_1^2 + 2\frac{y_1}{u} + \frac{1}{u^2}\right).$$

Po uwzględnieniu, że y_1 jest rozwiązaniem równania (1) i stosownym uproszczeniu otrzymamy równanie liniowe

$$u' + (Q(x) + 2R(x)y_1)\,u = -R(x). \tag{2}$$

Przykład 3.
Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x.$$

Rozwiązanie
Jest to równanie Ricattiego gdzie

$$P(x) = e^{2x} + e^x, \quad Q(x) = -2e^x, \quad R(x) = 1.$$

Łatwo zauważyć, że funkcja $y_1(x) = e^x$ jest rozwiązaniem szczególnym

$$e^x + 2e^x e^x - (e^x)^2 = e^{2x} + e^x$$

Szukamy rozwiązania w postaci

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}.$$

Dla naszych funkcji P, Q, R i y_1 Qrównanie (2) przyjmuje postać

$$u' = -1.$$

Zatem

$$u(x) = -x + C,$$

więc rozwiązanie ogólne naszego równania ma postać

$$y(x) = e^x - \frac{1}{x - C}.$$

Inne przykłady równań zależnych od parametru p.

Przykład 4. Rozważmy równanie:

$$x = f(y'). \tag{3}$$

Różniczkujemy powyższe równanie ze względu na y. Ponieważ $x = x(y)$ i robiąc podstawienie $p = y'$ ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej mamy

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{p}.$$

Różniczkujemy prawą stronę równania (3)

$$\frac{d}{dy}\left(f(y')\right) = \frac{d}{dy}\left(f(p)\right) = f'(p)\frac{dp}{dy}.$$

Stąd mamy

$$\frac{1}{p} = f'(p)\frac{dp}{dy}.$$

Zatem

$$dy = pf'(p)dp.$$

Całkując stronami powyższe równanie otrzymamy

$$y = \int pf'(p)\, dp = F(p) + C.$$

Rozwiązanie ogólne równania (3) ma postać

$$\begin{aligned} x &= f(p), \\ y &= F(p) + C. \end{aligned}$$

Przykład 5. Rozważmy równanie:

$$x = f(y, y'). \tag{4}$$

Różniczkując powyższe równanie ze względu na y otrzymamy

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}. \tag{5}$$

Niech

$$y = \varphi(p, C)$$

będzie rozwiązaniem równania (5) ze wzgledu na y. Wtedy rozwiązanie ogólne równania (4) ma postać

$$\begin{aligned} y &= \varphi(p, C), \\ x &= f(\varphi(p, C), p). \end{aligned}$$

Przykład 6. Rozważmy równanie:

$$y = f(y'). \tag{6}$$

Różniczkując powyższe równanie ze względu na x otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = p = f'(p)\frac{dp}{dx}.$$

Zatem
$$dx = \frac{f'(p)}{p} dp.$$
Całkując powyższą równość stronami otrzymamy
$$x = F(p) + C, \quad \text{gdzie } F(p) = \int \frac{f'(p)}{p} dp.$$
Rozwiązanie ogólne równania (6) ma postać
$$\begin{aligned} y &= f(p), \\ x &= F(p) + C. \end{aligned}$$

Przykład 7. Rozważmy równanie:
$$y = f(x, y'). \tag{7}$$
Różniczkując powyższe równanie ze względu na x otrzymamy
$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}. \tag{8}$$
Niech
$$x = \varphi(p, C)$$
będzie rozwiązaniem równania (8) ze wzgledu na x. Wtedy rozwiązanie ogólne równania (7) ma postać
$$\begin{aligned} x &= \varphi(p, C), \\ y &= f(\varphi(p, C), p). \end{aligned}$$