Rozpatrzmy układ n równań różniczkowych zwyczajnych, których prawe strony nie zależą od zmiennej t: (1)

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\,x_1}{d\,t} = f_1\,(x_1,\; x_2...,x_n)\,; \\ \dfrac{d\,x_2}{d\,t} = f_2\,(x_1,\; x_2...,x_n)\,; \\ .... \\ \dfrac{d\,x_n}{d\,t} = f_n\,(x_1,\; x_2...,x_n)\,. \end{cases}$$

Zakładamy, że funkcje $f_i,\; i = 1,...n,$ są różniczkowalne w sposób ciągły ze wzgledu na wszystkie zmienne x_i $i = 1,\dots n$.

Taki układ nazywa się **układem autonomicznym**.

Punkt $(x_{1,0},\, x_{2,0},...x_{n,0}) \in R^n$ nazywa się **punktem stacjonarnym** układu (1), jeżeli

$$f_i(x_{1,0},\, x_{2,0},...x_{n,0}) = 0, \quad i = 1,...,n.$$

W pewnych sytuacjach, zamiast pełnego układu (1), w małym otoczeniu punktu stacjonarnego można rozpatrywać jego **linearyzację** .

Rozpatrzmy prawą stronę tego układu. Każdą funkcję

$f_i(x_1,\, x_2,...,x_n), \quad i = 1,\dots,n,$ można w otoczeniu punktu $(x_{1,0},\, x_{2,0},...x_{n,0})$

przedstawić, zgodnie ze wzorem Taylora, w postaci

$$f_i(x_1,\, x_2,...,x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial\, x_k}(x_{1,0},\, x_{2,0},...,x_{n,0})\,(x_k - x_{k,0}) + R_i(\xi),$$

gdzie

$$\xi = (x_1 - x_{1,0},\dots,x_n - x_{n,0}) \quad \text{oraz} \quad \lim_{|\xi|\to 0} \frac{R_i(\xi)}{|\xi|} = 0.$$

Zatem układ (1) w otoczeniu punktu stacjonarnego $(x_{1,0},\, x_{2,0},...x_{n,0})$ można przybliżyć układem liniowym postaci:

$$(2) \qquad \frac{d}{d\,t}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ .... \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .... & ..... & ..... & ...... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ .... \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

gdzie

$$\xi_k = x_k - x_{k,0}, \qquad a_{i\,j} = \frac{\partial\, f_i}{\partial\, x_j}(x_{1,0},\, x_{2,0},...,x_{n,0}), \quad i,\, j = 1,2,....,n.$$

Układ (2) **nazywa się linearyzacją układu** (1) **w otoczeniu punktu stacjonarnego** $(x_{1,0}, x_{2,0}, ..., x_{n,0})$.
Okazuje się, że przy pewnych warunkach, rozwiązania układu (1) oraz rozwiąznia układu liniowego (2) są w małym otoczeniu punktu stacjonarnego "jakościowo identyczne". Ponieważ rozwiązywać (analizować) układ liniowy jest na ogół znacznie prościej, niż pełny układ.To, czy zachowanie pełnego układu w otoczeniu punktu stacjonarnego jest rzeczywiście reprezentowane przez jego linearyzację, zależy od wartości własnych macierzy linearyzacji układu (2).
Dla układów liniowych mamy następujące twierdzenie o stabilności:

Twierdzenie 1: o stabilności układów liniowych
Niech

$$X'(t) = A \cdot X(t) \tag{3}$$

bedzie układem liniowym równań różniczkowych o stałych współczynnikach.

1. Jeżeli części rzeczywiste wszystkich wartości własnych są mniejsze od zera to rozwiązanie zerowe układu (3) jest asymptotycznie stabilne.

2. Jeżeli części rzeczywiste wszystkich wartości własnych są mniejsze lub równe zeru to rozwiazanie zerowe układu (3) jest stabilne w sensie Lapunowa.

3. Jeżeli część rzeczywista chociaż jednej wartości własnej jest większa od zera to rozwiązanie zerowe układu (3) nie jest stabilne w sensie Lapunowa.

Twierdzenie 1: o stabilności układów autonomicznych

1. Jeżeli części rzeczywiste wszystkich wartości własnych macierzy

   $A = (a_{i\,j})$ układu (2) są mniejsze od zera to rozwiązanie stacjonarne układu (1) jest asymptotycznie stabilne.

2. Jeżeli część rzeczywista chociaż jednej wartości własnej macierzy

   $A = (a_{i\,j})$ układu (2) jest większa od zera to rozwiązanie stacjonarne układu (1) nie jest stabilne w sensie Lapunowa.