Układy równań liniowych rzedu drugiego

J.Janus, M.Luśtyk

Rozpatrzmy liniowy układ równań rzedu drugiego:

$$X''(t) = A \cdot X(t) \tag{1}$$

Szukamy rozwiązania układu (1) w postaci

$$X(t) = ve^{\alpha t}.$$

Ponieważ $X''(t) = v\alpha^2 e^{\alpha t}$, więc

$$v\alpha^2 e^{\alpha t} = Ave^{\alpha t}$$

stąd mamy

$$\alpha^2 v = Av.$$

Zatem

1. α^2 - jest wartością własną macierzy A,
2. wektor v - jest odpowiadającym jej wektorem własnym.

Jeżeli λ jest ujemną wartością własną macierzy A to oznacza, że $\alpha^2 = \lambda < 0$, więc istnieje $\omega > 0$ takie, że $\alpha^2 = -\omega^2$ czyli $\alpha = \omega i$. Zatem

$$X(t) = v(\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

jest rozwiązaniem układu (1). Analogicznie jak dla równań rzedu drugiego o stałych współczynnikach można pokazać, że funkcje

$$X_1(t) = v \cos \omega t \quad \text{i} \quad X_2(t) = v \sin \omega t)$$

są rozwiązaniami układu (1).

Twierdzenie 1
Jeżeli macierz A ma tylko rzeczywiste ujemne wartości własne

$$0 > \lambda_1 = -\omega_1^2 > \lambda_2 = -\omega_2^2 > \cdots > \lambda_n = -\omega_n^2$$

i niech $v_1,\ v_2, \ldots, v_n$ będą odpowiadającymi im wektorami własnymi, to rozwiązanie ogólne układu (1) ma postać:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i \left(a_i \cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t) \right). \tag{2}$$

Uwaga 1 Jeżeli $\lambda = 0$ jest wartością własną macierzy A a v jest odpowiadającym jej wektorem własnym to

$$X(t) = v(a + bt), \quad a,\ b \in \mathbb{R}$$

jest rozwiązaniem układu (1).
Istotnie $X''(t) = 0$ i $Av(a + bt) = (a + bt)Av = (a + bt)0 = 0.$

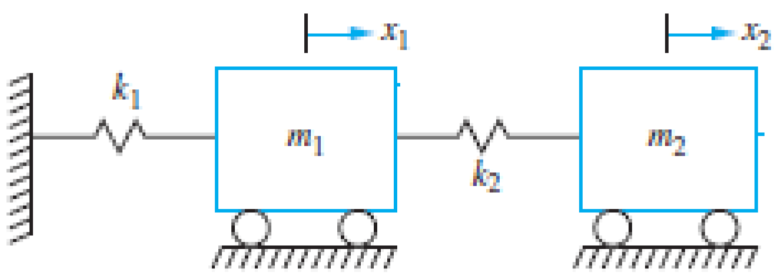
Twierdzenie 2
Jeżeli macierz A ma jedną wartość własną równą zero a pozostałe tylko rzeczywiste ujemne wartości własne

$$\lambda_1 = 0 > \lambda_2 = -\omega_2^2 > \cdots > \lambda_n = -\omega_n^2$$

i niech $v_1,\ v_2, \ldots, v_n$ będą odpowiadającymi im wektorami własnymi, to rozwiązanie ogólne układu (1) ma postać:

$$x(t) = v_1(a_1 + b_1 t) + \sum_{i=2}^{n} v_i \left(a_i \cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t) \right). \tag{3}$$

Przykład
Rozpatrzmy przykładukładu na rysunku 1.



Rysunek 1:

Równania ruchu tego układu opisane są układem równań:

$$(4) \qquad \begin{aligned} m_1x_1'' &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) = -(k_1+k_2)x_1 + k_2x_2 \\ m_2x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1) = k_2x_1 - k_2x_2. \end{aligned}$$

Dla $m_1 = 2kg$, $m_2 = 1kg$, $k_1 = 4N/m$, $k_2 = 2N/m$ układ (4) w zapisie macierzowym ma postać:

$$(5) \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X''(t) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} X(t).$$

Mnożąc obustronnie równość (5) przez macierz odwrotną:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

otrzymamy

$$(6) \qquad X''(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} X(t).$$

Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ wyznaczamy wartości własne i odpowiadające im wektory właasasne
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=eigensystem%5B%7B%7B-3,1%7D,%7B2,-2%7D%7D%5D`

$$\lambda_1 = -1, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = -4, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zatem $\omega_1 = 1$ i $\omega_2 = 2$ więc rozwiazanie ogólne układu (6) ma postać:

$$(7) \qquad X(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(a_1\cos t + b_1 \sin t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}(a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t).$$

Innym sposobem rozwiązania układu (4) jest sprowadzenie go do układu równań rzędu pierwszego. W tym celu wprowadzamy nowe zmienne:

$$x_1 = y_1,\ x_1' = y_1' = y_2,\ x_2 = y_3,\ x_2' = y_3' = y_4.$$

Dla nowych zmiennych układ (4) przyjmie postać:

$$(8) \qquad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ m_1y_2' &= -k_1y_1 + k_2(y_3 - y_1) = -(k_1+k_2)y_1 + k_2y_3 \\ y_3' &= y_4 \\ m_2y_4' &= -k_2(y_3 - y_1) = k_2y_1 - k_2y_3. \end{aligned}$$

Po podstawieniu w miejsce m_1, m_2, k_1, k_2 wcześniej podanych wartości otrzymamy następujący układ równań w zapisie macierzowym:

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} Y(t). \tag{9}$$

Aby rozwiązać układ (9) wyznaczamy wartości własne i wektory własne dla macierzy:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

`https://www.wolframalpha.com/input/?i=eigensystem%5B%7B%7B0,1,0,0%7D,%7B-3,0,1,0%7D,%7B-0,0,0,1%7D,%7B2,0,-2,0%7D%7D%5D`

$$\lambda_1 = 2i,\ v_1 = \begin{bmatrix} i \\ -2 \\ -i \\ 2 \end{bmatrix},\ \lambda_2 = -2i,\ v_2 = \begin{bmatrix} -i \\ -2 \\ i \\ 2 \end{bmatrix},\ \lambda_3 = i,\ v_3 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ -2i \\ 2 \end{bmatrix},\ \lambda_4 = -i,\ v_4 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 2i \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Korzystając ze wzorów (3) i (4) w (Równania różniczkowe część II, 5.3) wyznaczymy układ fundamentalny rozwiązań układu (9):

$$Y_1(t) = \Re(v_1)\cos 2t - \Im(v_1)\sin 2t = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\cos 2t - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\sin 2t = \begin{bmatrix} -\sin 2t \\ -2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{bmatrix},$$

$$Y_2(t) = \Re(v_1)\sin 2t + \Im(v_1)\cos 2t = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\sin 2t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\cos 2t = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \\ -\cos 2t \\ 2\sin 2t \end{bmatrix},$$

$$Y_3(t) = \Re(v_3)\cos t - \Im(v_3)\sin t = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\cos t - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}\sin t = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 2\sin t \\ 2\cos t \end{bmatrix},$$

$$Y_4(t) = \Re(v_3)\sin t + \Im(v_3)\cos t = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\sin t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}\cos t = \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ -2\cos t \\ 2\sin t \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie ogólne układu (9) ma zatem postać:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{bmatrix} = Y(t) = c_1 Y_1(t) + c_2 Y_2(t) + c_3 Y_3(t) + c_4 Y_4(t) =$$

$$c_1 \begin{bmatrix} -\sin 2t \\ -2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \\ -\cos 2t \\ 2\sin 2t \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 2\sin t \\ 2\cos t \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ -2\cos t \\ 2\sin t \end{bmatrix}$$

.

Uwzgledniając, że $y_1 = x_1$ i $y_3 = x_2$ z powyższej zależności wynika

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (-c_4 \cos t + c_3 \sin t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} (-c_2 \cos 2t + c_1 \sin 2t)\,.$$

Podstawiając do powyższej zależności $c_1 = b_2$, $c_2 = -a_2$, $c_3 = b_1$, $c_4 = -a_1$ otrzymamy zależność (7).