Zadania na zastosowanie równań różniczkowych.

Zadanie 1
Odpływ płynu z naczynia.
Naczynie jest wypełnione cieczą do poziomu H. Niech S będzie znanym obszarem przekroju poprzecznego zadanym funkcją zależną od wysokości h, tj. $S = S(h)$. W dolnej części naczynia znajduje się otwór o polu powierzchni w, przez który płyn wypływa. Określić czas t, po którym poziom cieczy spadnie od początkowej wysokości H do wysokości h oraz czasu T całkowitego opróżnienia naczynia, biorąc pod uwagę, że znana jest szybkość v zmiany ilości (objętości) płynu w naczyniu która określona jest funkcją $v = v(h)$.

Zadanie 2
Problem wzrostu populacji.
Zakładamy, że tempo wzrostu populacji jest wprost proporcjonalne do liczby ludności. Znajdź związek między populacją P i czasem t, jeśli wiadomo, że w pewnym momencie przyjęta jako początkową liczbe ludności równa P_0, a rok później liczba ludności wzrósła o x procent.

Zadanie 3
Znajdź równanie krzywej, która ma odcinek odcięty przez styczną na osi Y, równy połowie sumy współrzędnych punktu styczności.

Zadanie 4
20 litrowy pojemnik zawiera powietrze (80% azotu i 20% tlenu). Do naczynia wpływa 0,1 litra azotu na sekundę, zakładamy, że azot rozprowadza się w naczyniu równomiernie i błyskawicznie . Po jakim czasie będzie w naczyniu 99% azotu?

Zadanie 5
W zbiorniku znajduje się 100 litrów roztworu zawierającego 10 kg soli. Woda jest stale wlewana do zbiornika (5 litrów na minutę), który jest mieszany z istniejącym rozwiązaniem. Mieszanina wypływa w takiej samej ilości na minute. Ile soli pozostanie w zbiorniku po godzinie godziny?

Zadanie 6
Po wyłączeniu silnika łódź zwalnia pod działaniem oporu wody, który jest proporcjonalny do prędkości łodzi. Początkowa prędkość łodzi $v_0 = 2m/s$, po 4 s jej prędkość wynosiła 1 m/s. Po jakim czasie łódź będize miała prędkość 0,25 m/s?

Zadanie 7
Spadochroniarz skoczył z wysokości 1,5 km i otworzył się spadochron na

wysokości 0,5 km. Jak długo trwało to spadnie do otwarcia spadochronu? Opór powietrze jest proporcjonalne do kwadratu prędkości. (Zakładamy, że przyspieszenie grawitacyjne wynosi $10m/s^2$.)

Zadanie 8
Po jakim czasie cała woda wypłynie z pionowego cylindrycznego zbiornika o średnicy 2R = 1,8 m i wysokości H = 2,45 m przez otwór w dnie o średnicy 2r = 6 cm? Zakładamy, że woda wypływa ze zbiornika z szybkością równą $k\sqrt{2gh}$, gdzie $g = 10m/s^2$ to przyspieszenie ziemskie, h to wysokość poziomu wody nad otworem, a k jest trochę bezwymiarowa współczynnik empiryczny równy 0,6 dla wody.

Zadanie 9
Ciało w ciągu 10 minut ochłodziło się od $100°C$ do $60°C$. Temperatura otoczenia wynosi $20°C$. Po jakim czasie ostygnie do $30°C$? (Zakładamy, że tempo chłodzenia ciała jest proporcjonalne do różnicy temperatury ciała i otoczenia.

Zadanie 10
Absorpcja strumienia światła w cienkiej warstwie wody jest proporcjonalna do grubość warstwy i strumienia padającego na jej powierzchnię. Podczas przechodzenia przez warstwę 1 m grubości wchłoneło się 1/4 oryginalnego strumienia świetlnego. Jaka część światła osiąga głębokość 3 m?

Zadanie 11
Znajdź równania krzywych, których suma długość normalnej i podnormalnej ma stałą wartość równą a.

Zadanie 12
Problem wzrostu populacji. Tempo wzrostu populacji jest wprost proporcjonalne do liczby ludności. Znajdź związek między populacją P i czasem t, jeśli wiadomo, że w pewnym momencie przyjętym jako moment początkowy, liczba ludności był równy P_0, a rok później wzrosła o a - procent.

Zadanie 13
Znajdź równanie krzywej, która ma odcinek odcięty przez styczną na osi Y, równy połowie sumy współrzędnych punktu styczności.

Zadanie 14
Lejek ma kształt stożka o promieniu R = 6 cm i wysokości H = 10 cm i jest zwrócony w dół. Po jakim czasie cała woda wypłynie z lejka przez okrągłą średnicę otworu 0,5 cm na dole stozka stożka? (Zakładamy, że woda wypływa z prędkością $0.6\sqrt{2gh}$ gdzie $g = 10m/s^2$ jest przyspieszeniem grawitacyjnym, a h jest wysokością poziomu woda nad otworem).

Zadanie 15
Napełniony, stulitrowy zbiornik z wodą w której rozpuszczono 2 kg soli. Do zbiornika jedną rurką wpływa czysta woda z prędkością 5 litrów na minutę, a drugą wypływa mieszanina z tą samą prędkością. Wyznacz ilość soli w zbiorniku w zależności od czasu. Przyjmij, że proces mieszania cieczy jest natychmiastowy.

Zadanie 16
Pewna krzywa na płaszczyźnie Oxy przecina oś rzędnych w punkcie (0, 1). W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią Ox a styczną jest równy podwojonej rzędnej punktu styczności. Wyznacz równanie tej krzywej.

Zadanie 17
Pewna krzywa na płaszczyźnie Oxy przecina oś odciętych w punkcie (1, 0). W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią Ox a styczną jest równy rzędnej punktu styczności, pomniejszonej o 4. Wyznacz równanie tej krzywej.

Zadanie 18
Pewna krzywa na płaszczyźnie Oxy przecina oś rzędnych w punkcie (0, 3). W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią Ox a styczną jest równy różnicy rzędnej i odciętej punktu styczności. Wyznacz równanie tej krzywej.

Zadanie 19
Pewna krzywa na płaszczyźnie Oxy przechodzi przez środek układu współrzędnych. W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią Ox a styczną jest równy sumie rzędnej i podniesionej do kwadratu odciętej punktu styczności. Wyznacz równanie tej krzywej.

Zadanie 20
Prędkość rozpadu pierwiastka proieniotwórczego jest proporcjonalna do masy substancji, która w danej chwili się jescze nie rozpadła. Wyznaczyć zależność masy pierwiastka od czasu.

Zadanie 21
Po upływie 5 lat ze 100 g substancji radioaktywnej pozostało 25 g. Jaki jest czas połowicznego rozpadu tej substancji?

Zadanie 22
Znaleźć krzywe, dla których długość odcinka, jaki styczna poprowadzona w dowolnym punkcie krzywej odcina na osi Oy, jest równa odległości punktu styczności od poczatku układu współrzędnych.

Zadanie 23
Znaleźć krzywe, dla których długość odcinka, jaki styczna poprowadzona w dowolnym punkcie krzywej odcina na osi Oy, jest równa kwadratowi rzędnej punktu styczności.

Zadanie 24
Znaleźć równanie krzywej przechodzącej przez punkt (2,2), dla której pole trójkąta utworzonego przez oś Ox, styczną i wektor wodzący punku styczności jest stałe i równa się 2.

Zadanie 25
W obwodzie elektrycznym szeregowo połączono opornik o oporności R, cewkę o indukcyjności L oraz zewnętrzną siłę elektromotoryczną $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$. Wyznaczyć natężenie prądu $i(t)$ w tym obwodzie, jeżeli $i(0) = 0$.

Zadanie 26
Krzywa $y = y(x)$ przechodzi przez poczatek układu współrzednych i lezy w górnej półpłaszczyźnie. Kazdy prostokątograniczony osiami układu współrzędnych i prostymi poprowadzonymi z dowolnego punktu $(x, y(x))$ krzywej prostopadłymi do nich krzywa $y(x)$ dzieli na dwie części. Pole zawarte pod krzywą $y(x)$ jest dwa razy mniejsze niż pole nad krzywą. Wyznaczyć równanie tej krzywej.

Zadanie 27
Einstein-253 rozpada się z predkością proporcjonalną do masy substancji, która w danej chwili jeszcze się nie rozpadła. Określić okres połowicznego rozpadu tau, jeśli materiał ten traci jedną trzecią swojej masy w ciągu 11.7 dni.

Zadanie 28
Załóżmy, że w zamkniętym pojemniku początkowo znajdowało się 100 mg toru-234, do pojemnika ze stałą szybkością 1 mg na dzień dodaje się toru-234.
(a) Określ masę $m(t)$ toru - 234 w pojemniku w dowolnym momencie t, biorąc pod uwagę, że jego okres połowicznego zaniku wynosi 24.1 dni.
(b) Oblicz $\lim_{t\to\infty} m(t)$.
(c) Jeśli tor-234 jest dodawany do pojemnika w wysokości k mg / dzień, znajdź wartość k, która jest wymagana przy utrzymaniu stałego poziomu 100 mg toru-234 w pojemniku.

Zadanie 29
Zbiornik początkowo zawiera 120 litrów czystej wody. Mieszanina zawierająca 25 gramów soli w 1-litrze wlewana jest do zbiornika z prędkością 2 litrów

/ min, błyskawicznie wymieszana mieszanina opuszcza zbiornik z tą samą prędkością. Znajdź wyrażenie określające masę $m(t)$ soli w zbiorniku w dowolnym czasie t.
Ponadto oblicz $\lim_{t\to\infty} m(t)$.

Zadanie 30
Zbiornik otwarty od góry ma podstawę o powierzchni 1 metra kwadratowego i wysokości 2 metrów. Zbiornik jest początkowo pusty, gdy woda zaczyna wlewać się do niego z prędkością 7 litrów na minutę. W tym samym czasie woda wypływa również ze zbiornika przez otwór w dnie z prędkością $5\sqrt{h}$ litrów na minutę, gdzie h to wysokość wody w zbiorniku w metrach. Czy woda wypełni zbiornik do samej góry, jesli tak to po jakim czasie?

Zadanie 31
Próbka nieznanego izotopu promieniotwórczego początkowo waży 5,00 g. Rok później masa spadła do 4,27 g. (a) Jak szybko maleje masa izotopu w zależności od czasu?
(b) Jaki jest okres połowicznego rozpadu izotopu?

Zadanie 32
Butelka wody o temperaturze początkowej $25°C$ umieszczona w lodówce o temperaturze wewnętrznej $5°C$. Biorąc pod uwagę, że temperatura wody wynosiła $20°C$ dziesięć minut po umieszczeniu w lodówce, jaka będzie temperatura wody po godzinie?

Zadanie 33
Podczas reakcji chemicznej substancja A ulega przemianie do substancji B z prędkością proporcjonalną do kwadratu ilości A. W momencie początkowym mamy 60 gramów substancji A, a po 1 godzinie tylko 10 gramów substancji A nie uległo przemianie. Określ zależność substancji A w zależności od czasu. Ile będzie substancji A po 2 godzinach?

Zadanie 34
Stopa wzrostu inwestycji jest proporcjonalna do wartości inwestycji w dowolnym momencie t. Inwestycja w wysokości 2000 USD wzrasta do wartości 2983,65 USD w ciągu 5 lat. Znajdź jej wartość po 10 latach.

Zadanie 35
Wyznaczyć czas, po którym woda wypełniająca półkulisty pojemnik o średnicy 1m wypłynie z niego przez otwór ośrednicy 0.1m który znajduje się w jego dnie, jeżeli predkość wypływu wody $v = 0.6\sqrt{2gh}\,cm/s$, przy czym h jest wysokością słupa wody nad otworem, a g - oznacza przyspieszenie grawitacyjne.

Zadanie 36
Znaleźć krzywą, której styczne tworzą z osiami układu współrzednych trójkąt o powierzchni $2a^2$.

Zadanie 37
Znaleźć krzywą o tej własności, że w dowolnym jej punkcie współczynnik kierunkowy stycznej jest równy stosunkowi rzędnej do odciętej punktu styczności wziętej ze znakiem przeciwnym.

Zadanie 38
Krzywa $y(x)$ przechodzi przez punkt $(0, 1)$ i ma tą własność, ze w każdym jej punkcie współczynnik kierunkowy stycznej do tej krzywej jest równy podwojonemu iloczynowi współrzędnych punktu styczności. Znaleźć tą krzywą.

Zadanie 39
Znaleźć krzywe o tej własności, że pole trapezu, ograniczonego osiami układu, styczną i prostą równoległą do osi odciętej przechodzącą przez punktu styczności jest wielkością stałą równą $3a^2$.

Zadanie 40
Znaleźć krzywe o tej własności, że pole trapezu, ograniczonego osiami układu, styczną i prostą równoległą do osi rzędnych przechodzącą przez punktu styczności jest wielkością stałą równą $3a^2$.

Zadanie 41
Znaleźć krzywą o tej własności, że pole trójkąta ograniczonego styczną osią odcietych i odcinkiem od początku układu współrzędnych do punktu styczności jest wielkością stałą równą a^2.

Zadanie 42
Znaleźć krzywą o tej własności, że dla każdej normalnej odcinek leżący na niej o końcach na krzywej i osi $0x$ ma długość 1.

Zadanie 43
Znaleźć krzywą przechodzącąprzez punkt $(0, -4)$ o tej własności, ze współczynnik kierunkowy stycznej do tej krzywej w kazdym jej punkcie jest równy rzędnej tego punktu powiększonej o 3.

Zadanie 44
Znaleźć krzywą przechodzącą przez początek układu współrzędnych o tej własności, że srodek normalnej od dowolnego punktu na krzywej do osi $0x$ leży na paraboli $y = ax^2$.

Zadanie 45
Znaleźć krzywą o tej własności, że odcinek odcięty na osi $0y$ przez styczną w dowolnym punkcie krzywej jest równy połowie sumy współrzędnych tego punktu.

Zadanie 46
Znaleźć krzywą o tej własności, że odcinek odcięty na osi $0y$ przez styczną w dowolnym punkcie krzywej jest równy kwadratowi odciętej tego punktu.

Zadanie 47
W dowolnym momencie t, tempo wzrostu populacji $y(t)$ jeleni w parku stanowym jest proporcjonalny do iloczynu $y(t)$ i $M - y(t)$ gdzie $M = 600$ jest maksymalną liczbą jeleni jaka może żyć w parku. W momencie początkowym liczba jeleni wynosiła 100 sztuk a po czterech latach wzrosła do 200 sztuk. Wyznaczyć funkcję $y(t)$ określającą liczbę jeleni w zależności od czasu.

Zadanie 48
Model rozwoju populacji Gompertza.
Model ten zakłada, że szypkość przyrostu populacji jest proporcjonalna do liczebności populacji w danym momencie $y(t)$ i $\ln\left(\frac{M}{y(t)}\right)$ gdzie M - graniczna liczebność populacji.
W pewnym regionie gdzie dotychczas nie było królików przywieziono 50 królików. Szacuje się, że maksymalna populacja królików jaka może być w tym regionie wynosi 600 sztuk. Po 1 roku, populacja królików wynosiła 100 sztuk. Jeśli populacja będzie się rozwijać zgodnie z modelem wzrostu Gompertza to ile królików będzie po 3 latach?

Zadanie 49
Pewna krzywa na płaszczyźnie Oxy przecina oś rzędnych w punkcie $(0, 3)$. W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią Ox a styczną jest równy różnicy rzędnej i odciętej punktu styczności. Wyznacz równanie tej krzywej.

Zadanie 50
Pewna krzywa na płaszczyźnie Oxy przechodzi przez środek układu współrzędnych. W każdym punkcie tej krzywej tangens kąta pomiędzy osią Ox a styczną jest równy sumie rzędnej i podniesionej do kwadratu odciętej punktu styczności. Wyznacz równanie tej krzywej.

Zadanie 51
W zbiorniku o pojemności 500 litrów w momencie początkowym jest $V_0 = 200$ litrów roztworu wodnego w którym rozpuszczono 100 gramów soli. Roztwór soli zawierający 1 gram soli w litrze, wtłaczany jest do zbiornika z prędkością

3 litrów na minute i momentalnie jest wymieszany z pozostałą cieczą. W tym samym czasie z prędkością 2 litrów na minute upuszczana jest ciecz ze zbiornika. Określic ilość soli w zbiorniku gdy zbiornik będzie pełny.

Zadanie 52
Radioaktywny materiał w momencie początkowym miał masę 50 miligramów. Po 1 godzinie stracił 80% swojej masy.
a) Wyznaczyć zależność masy materiału od czasu.
b) Wyznaczyć masę materiału po 4 godzinach.
c) Wyznaczyć czas połowicznego rozkładu.

Zadanie 53
Mały pokój o objętości 1000 litrów zawiera 40% tlenu. Powietrze jest filtrowane z prędkością 10 litrów na sekunde i wraca do pokoju z zawartością 10% tlenu. Zakładamy, że powietrze jest natychmiast mieszane. Określic czas po jakim powietrze w pokoju będzie zawierało 20% tlenu.

Zadanie 54
Zbiornik otwarty od góry, którego ściany są prostopadłe do podstawy ma pole podstawy $1\,m^2$ i wysokość $2\,m$. W momencie poczatkowym zbiornik jest pusty. Do zbiornika wlewana jest ciecz z prędkością 7 litrów na minute. W dnie zbiornika jest mały otwór przez który wylewa się ciecz ze zbiornika.Prędkość z jaką wylewa się ciecz wynosi $5\sqrt{h}$ - litrów na minute gdzie h - wysokość słupa cieczy w zbiorniku. Po jakim czasie zbiornik bęzie napełniony do pełna.

Zadanie 55
Spadochroniarz skoczył z wysokości 1,5 km i otworzył się spadochron na wysokości 0,5 km. Jak długo trwało to spadnie do otwarcia spadochronu? Opór powietrze jest proporcjonalne do kwadratu prędkości. (Zakładamy, że przyspieszenie grawitacyjne wynosi $10m/s^2$.)

Zadanie 56
Po jakim czasie cała woda wypłynie z pionowego cylindrycznego zbiornika o średnicy 2R = 1,8 m i wysokości H = 2,45 m przez otwór w dnie o średnicy 2r = 6 cm? Zakładamy, że woda wypływa ze zbiornika z szybkością równą $k\sqrt{2gh}$, gdzie $g = 10m/s^2$ to przyspieszenie ziemskie, h to wysokość poziomu wody nad otworem, a k jest trochę bezwymiarowa współczynnik empiryczny równy 0,6 dla wody.

Zadanie 57
W zbiorniku znajduje się 100 litrów roztworu zawierającego 10 kg soli. Woda jest stale wlewana do zbiornika (5 litrów na minutę), który jest mieszany z istniejącym rozwiązaniem. Mieszanina wypływa w takiej samej ilości na minute. Ile soli pozostanie w zbiorniku po godzinie?

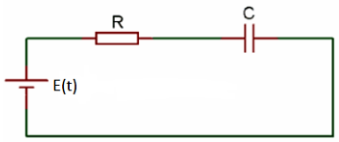
Zadanie 58
Po wyłączeniu silnika łódź zwalnia pod działaniem oporu wody, który jest proporcjonalny do prędkości łodzi. Początkowa prędkość łodzi $v_0 = 2m/s$, po 4 s jej prędkość wynosiła 1 m/s. Po jakim czasie łódź będize miała prędkość 0,25 m/s?

Zadanie 59
Wyznaczyć równanie krzywej o tej własności, że styczna w każdym punkcie krzywej tworzy z osiami układu trójkąt o polu $2a^2$.

Zadanie 60
Wyznaczyć równanie krzywej przechodzacej przez poczatek ukladu o tej własności, że w każdym punkcie krzywej odcinek normalnej odcięty osiami pierwszej ćwiartki układu współrzędnych ma długość równą 2.

Zadanie 61
Wyznaczyć równanie krzywej o tej własności, że styczna w każdym punkcie krzywej odcina na osiach układu odcinki, że suma odwrotności kwadratów długości tych odcinków jest rowna 1.

Zadanie 62
W obwodzie elektrycznym szeregowo połączono opornik o oporności $R = 10\,k\Omega$, kondensator o pojemności $C = 10\,\mu F$ oraz siłę elektromotoryczną $E(t) = 15\,V$. Wyznaczyć napięcie na kondensatorze $V(t)$ w zależności od czasu t, jeżeli $V(0) = 0$.



Zadanie 63
W łódce przy prędkości 1,5m/s wyłączono silnik. Łódka zwalnia pod wpływem siły oporu wody która jest proporcjonalna do prędkości łódki. Po 4 sekundach prędkość łódki zmniejszyła się do 1m/s. Po jakim czasie prędkość łódki zmniejszy się do 0,2m/s ? Jaką odległość przebędzie łódka do zatrzymania?

Zadanie 64
Skoczek spadochronowy spada z wysokości 1,5km a otworzył spadochron na wysokości 0,5km. Ile czasu opadał do otwarcia spadochronu? Wiadomo, że w powietrzu graniczna prędkość z jaką opada człowiek wynosi 50m/s. Należy przyjąć, że opór powietrza jest proporcjonalny do kwadratu predkości.

Zadanie 65
Piłka upuszczona z wysokości 16,3m bez predkości początkowej. Należy przyjąć, że siła oporu powietrza jest proporcjonalna do kwadratu prędkości i przy prędkości 1m/s wynosi 0,0047 N. Z jaką prędkością piłka uderzy o ziemie?

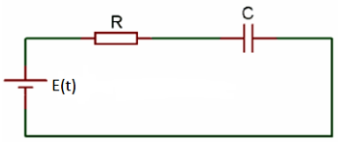
Zadanie 66
Beczka o kształcie walca o wysokości H=2m i średnicy 2R=1,6m wypełniona jest wodą. Beczka jest położona poziomo. W najniższym punkcie beczki jest otwór o średnicy 2r=6cm przez który wylewa sie woda z prędkością $v = 0,6\sqrt{2gh}$ gdzie g- przyspieszenie ziemskie, h- wysokośc słupa wody nad otworem. Obliczyć czas po którym beczka bedzie opróżniona.

Zadanie 67
Beczka o kształcie walca postawiona pionowo ma w dnie otwór przez który wylewa się woda. Połowa wody z pełnej beczki wylała się w ciągu 5 minut. Za jaki czas wyleje się cała woda?

Zadanie 68
Zbiornik w kszałcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ściętego o boku większej podstawy 1m i mniejszej o boku 0,5m i wysokości 1m zawiera w dnie (którym jest większa podstawa) otwór o powierzchni $3\,cm^2$. Do zbiornika wlewana jest woda z prędością 3 litrów na sekund. Po jakim czasie zbiornik zostanie napełniony?

Zadanie 69
Masa rakiety z pełnym zapasem paliwa wynosi M a bez paliwa m a predkość wylatujących gazów z rakiety v_g. W momencie początkowym prędkość wynosi zero. Wyznaczyć zależność prędkości rakiety od zużytego paliwa?

Zadanie 70
W obwodzie elektrycznym szeregowo połączono opornik o oporności R, kondensator o pojemności C oraz siłę elektromotoryczną $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$. Wyznaczyć natężenie prądu $i(t)$ w obwodzie w zależności od czasu t, jeżeli $i(0) = 0$.

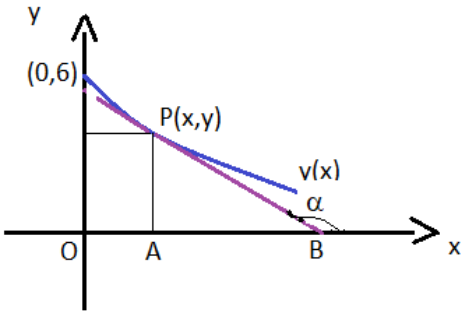


Zadanie 71
Znaleźć krzywe dla których w dowolnym punkcie promień krzywizny jest dwa razy większy od odcinka normalnej miedzy punktem na krzywej a osią odciętych. Rozpatrzyć osobno przypadek kiedy funkcja jest wypukła $y'' > 0$ i osobno przypadek kiedy jest wklęsła $y'' < 0$.
Wzór na promień krzywizny krzywej $y(x)$

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

Zadanie 72
Znaleźć krzywą dla której promień krzywizny jest odwrotnie proporcjonalny do kosinusa kata między styczną a osią odcietych.

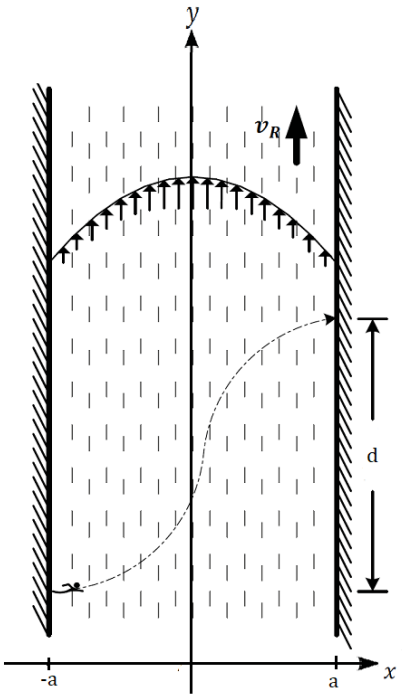
Zadanie 73
Narciarz wodny jest ciagniony za pomocą liny o długości 6m przymocowanej do końca łodzi. Łódz porusza się wzdłóż osi x ze stałą prędkością a lina jest zawsze napięta. Początkowo łódz jest w punkcie O a narciarz w $(0, 6)$. Wyznaczyć równanie krzywej $y(x)$ po której porusza się narciarz. Na poniższym rysunku punk P przedstawia położenie narciarza a B łodzi. Odcinek $|PB| = 6m$ i jest styczny do szukanej krzywej.



Zadanie 74
W rzece o szerokości 2a prędkość prądu rzeki jest największa na środku i maleje do zera przy brzegu, jest zadana wzorem

$$v_R = v_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

gdzie v_0- prędkość na środku. Pływak płynie prostopadle do przeciwległego brzegu z prędkością v_s. Wyznaczyć równanie krzywej $y(x)$ po której płynie pływak?



Zadanie 75
Wyznaczyć równanie krzywej o tej własności, że długość krzywej liczona od punktu $(0, 1)$ do dowolnego punktu na krzywej jest równa tangensowwi kata jaki tworzy styczna do krzywej w tym punkcie z osią Ox.

Zadanie 76
Określić predkość z jaką uderzy w ziemię meteoryt. Zakładamy, ze porusza się po lini prostej prostopadłej do powierzchni ziemi i jego przyspieszenie jest proprcjonalne do odwrotności kwadratu odległości od środka ziemi.

Zadanie 77
Znaleźć równanie krzywej o tej własności, że promień krzywizny jest proporcjonalny do długości normalnej.
Promień krzywizny krzywej $y(x)$ określony jest wzorem

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

Długość normalnej jest to długość odcinka na normalnej do krzywej, łączącego punkt na krzywej z punktem przecięcia normalnej z osią Ox.

Zadanie 78
Znaleźć równanie krzywej o tej własności, że promień krzywizny jest równy 2.
Promień krzywizny krzywej $y(x)$ określony jest wzorem

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

Zadanie 79
Znaleźć równanie krzywej o tej własności, że rzut promienia krzywizny na oś Oy jest równy 2 a oś Ox jest styczna do krzywej w początku układu współrzednych.
Promień krzywizny krzywej $y(x)$ określony jest wzorem

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

Zadanie 80
Znaleźć równanie krzywej o tej własności, że promień krzywizny jest równy sześcianowi długości normalnej. Ponadto szukana krzywa przechodzi przez punkt $(0, 1)$ i styczna do krzywej w tym punkcie tworzy z osią Ox kąt $45°$.
Promień krzywizny krzywej $y(x)$ określony jest wzorem

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

Długość normalnej jest to długość odcinka na normalnej do krzywej, łączącego punkt na krzywej z punktem przecięcia normalnej z osią Ox.