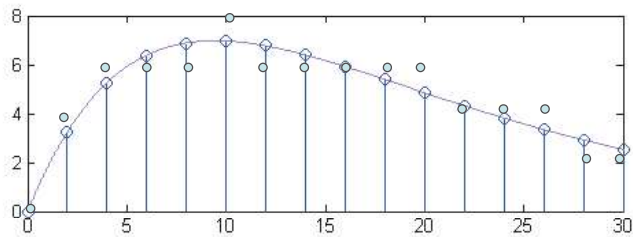


1. Alan V. Oppenheim, Ronald W.Schafer: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, 1979.
2. Jerzy Szabatin: Podstawy teorii sygnałów. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, 1982.
3. **Richard G. Lyons: Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, WKŁ 1999, 2003.**
5. Jacek Izydorczyk, Grzegorz Płonka, Grzegorz Tyma: Teoria Sygnałów. Helion 1999.
6. Marian Pasko, Janusz Walczak: Teoria sygnałów. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1999.
7. Adam Drozdek: Wprowadzenie do kompresji danych. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1999.
8. Khalid Sayood: Kompresja danych wprowadzenie. Wydawnictwo RM, 2002.
9. Włodzimierz Kwiatkowski: Wstęp do cyfrowego przetwarzania sygnałów. Warszawa 2003.
10. Dag Stranneby: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. BTC 2004.
11. Jacek Izydorczyk, Jacek Konopacki: Filtry analogowe i cyfrowe. 2004.
12. **Tomasz Zieliński: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. WKŁ 2005.**
13. Bartosz Ziółko, Mariusz Ziółko: Przetwarzanie mowy. AGH 2011.

Próbkowanie sygnałów (ang. *sampling*)



Dyskretyzacja czyli próbkowanie ◦

+

Kwantyzacja ◦



Sygnał cyfrowy

Czy znając dyskretne wartości sygnału można z nich odtworzyć sygnał analogowy? 12

PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW ANALOGOWYCH NA SYGNAŁY CYFROWE

1. Definicja próbkowania sygnału
2. Twierdzenie Shannona
3. Aliasing
4. Przetwarzanie obrazów analogowych na dyskretne

11

Próbkowanie sygnału akustycznego

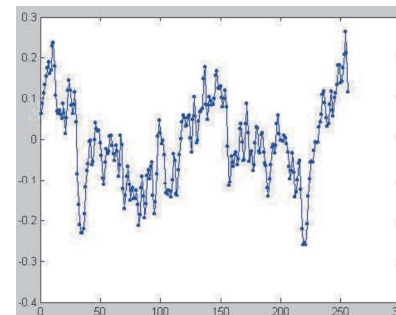
Sygnał dyskretny powstaje z sygnału analogowego zgodnie ze wzorem

$$s(i) = s_a(i\Delta t)$$

przy czym Δt jest odstępem między próbkami, czyli okresem próbkowania.

Odwrotność okresu próbkowania jest częstotliwością próbkowania $f_p = \frac{1}{\Delta t}$

Sygnał dyskretny można zapisać w postaci wektorowej $s = [s(0), s(1), \dots, s(M-1)]^T \in \mathfrak{R}^M$



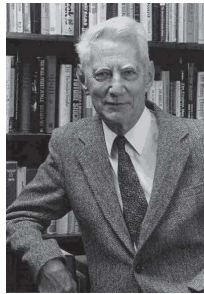
Przykład 256 próbek sygnału

$$f_p = \frac{1}{\Delta t} = 44100 \text{ [Hz]}$$

czyli

$$\Delta t = \frac{1}{44100} \text{ [s]} = 2268 \cdot 10^{-8} \text{ [s]} = 22,68 \text{ [\mu s]}$$

13



Claude Elwood Shannon
1916 - 2001

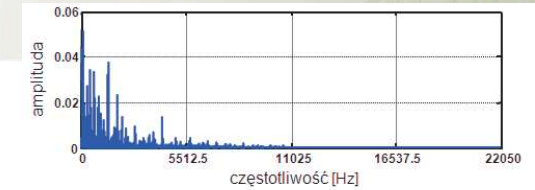


Harry Nyquist
1889-1976



Владимир Котельников
(W. Kotelnikow)
1908-2005

Kotelnikow 1933 rok
Shannon 1949 rok



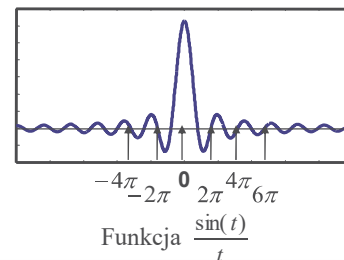
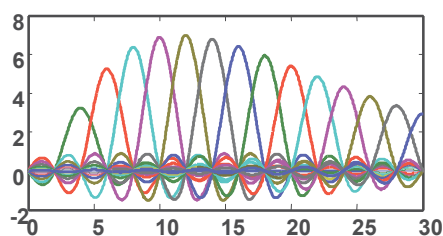
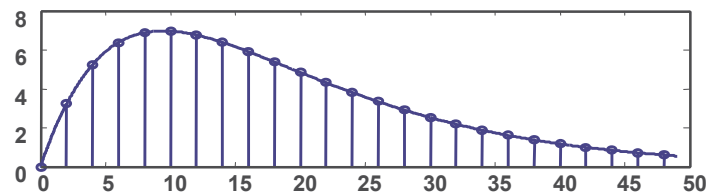
Jeżeli spełnione są warunki:

- 1) nośnik widma sygnału $\hat{s} \in L^2(\mathfrak{R})$ jest ograniczony, tzn. istnieje $f_m > 0$ takie, że $\hat{s}(f) = 0$ dla $|f| \geq f_m$,
- 2) próbki $\{s(n\Delta t)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ sygnału są pobierane w odstępach czasu Δt takich, że $\frac{1}{\Delta t} = f_p \geq 2f_m$,

to wtedy sygnał $s(t)$ może być odtworzony z ciągu próbek za pomocą szeregu

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t) \frac{\sin(\pi(t - n\Delta t) / \Delta t)}{\pi(t - n\Delta t) / \Delta t}.$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t) \frac{\sin(\pi(t - n\Delta t) / \Delta t)}{\pi(t - n\Delta t) / \Delta t}$$



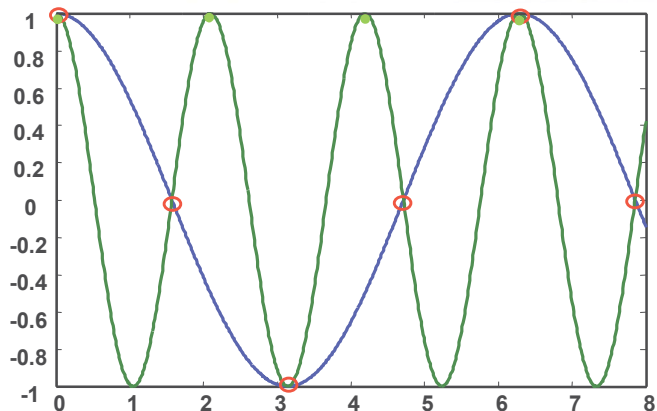
Z twierdzenia Shanona wiemy, że

$$\frac{1}{\Delta t} = f_p \geq 2f_m,$$

Zatem częstotliwość próbkowania może być dowolnie duża.

Co się jednak stanie jeżeli częstotliwość próbkowania będzie za mała?

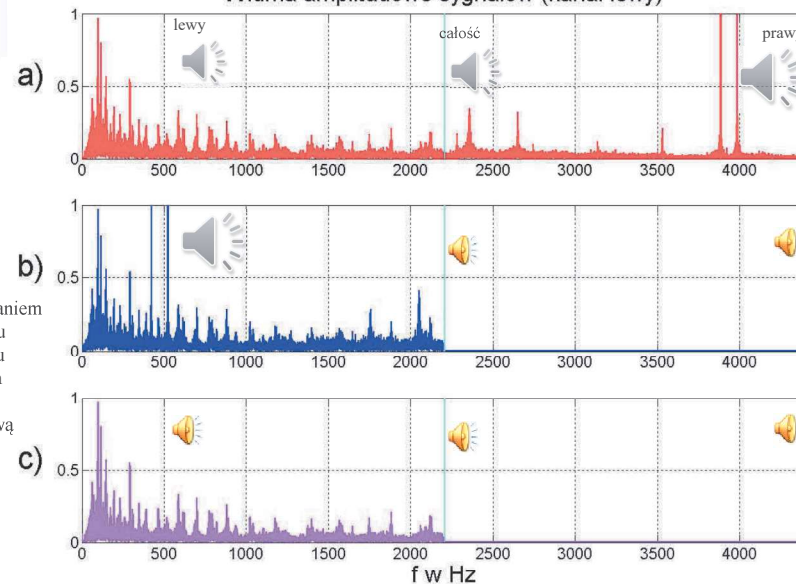
Aliasing



Przyjęta gęstość dyskretyzacji oznacza, że próbki ○ mają takie same wartości dla dwóch różnych sygnałów.

Sygnal 1 $f_p=44100 \text{ Hz} \rightarrow 4410 \text{ Hz} (10x)$

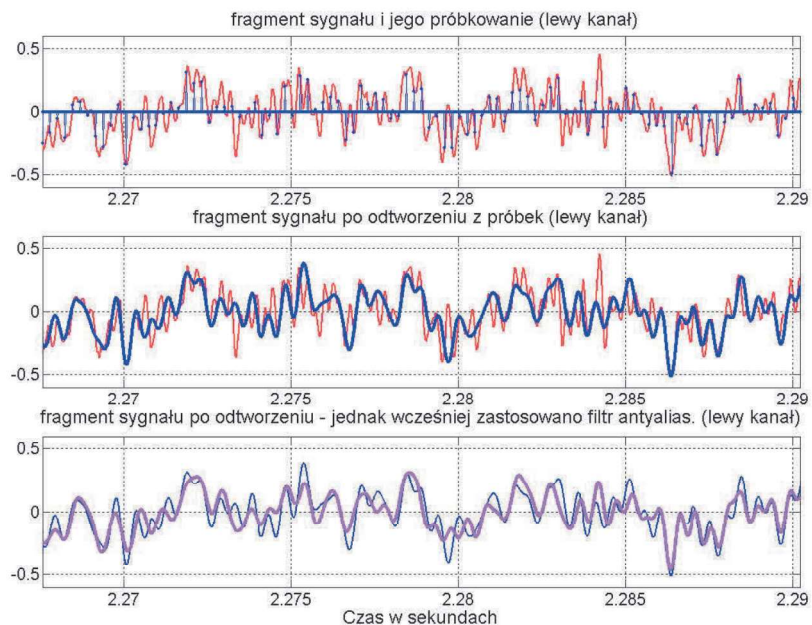
Widma amplitudowe sygnałów (kanał lewy)



- a) przed próbkowaniem
- b) po próbkowaniu
- c) po próbkowaniu poprzedzonym filtracją antyaliasingową

Zakłócenie dodano tylko do kanału lewego

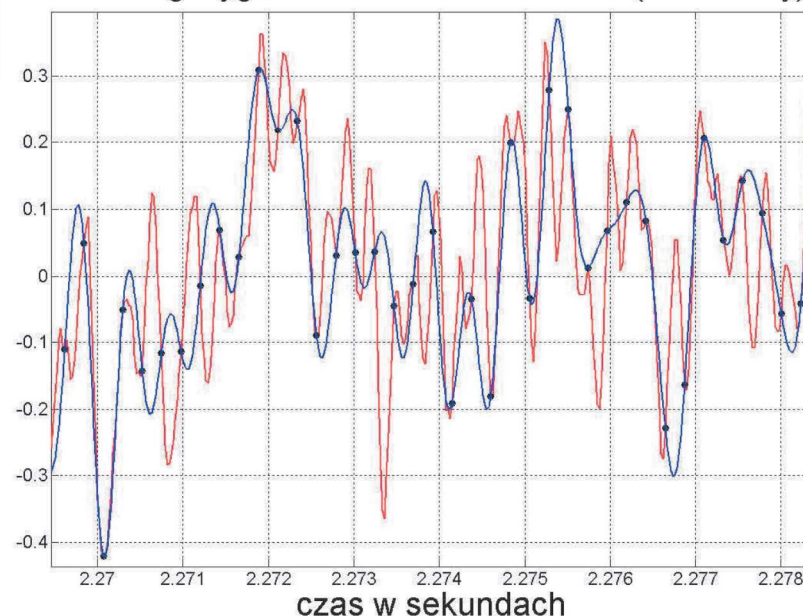
Sygnal 1 $f_p=44100 \text{ Hz} \rightarrow 4410 \text{ Hz} (10x)$



Czas w sekundach

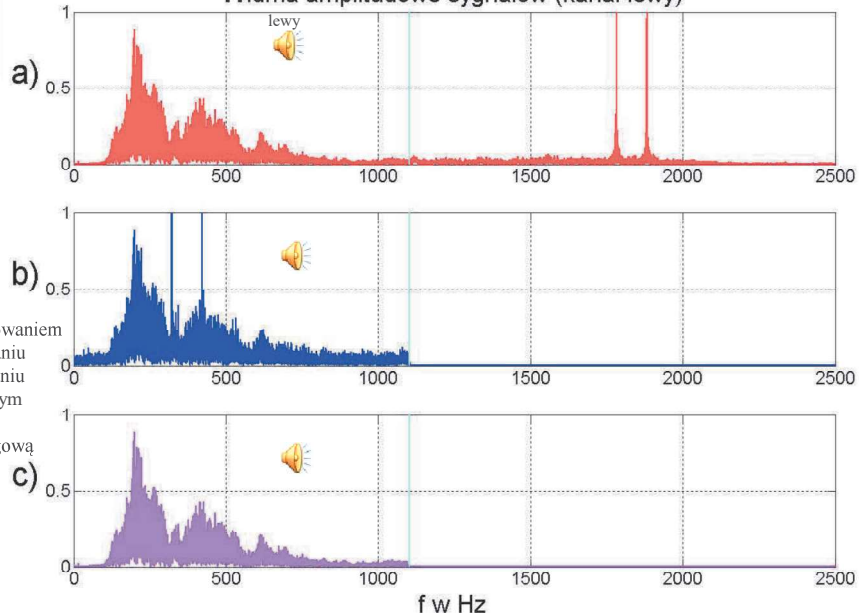
Sygnal 1 $f_p=44100 \text{ Hz} \rightarrow 4410 \text{ Hz} (10x)$

Przebiegi sygnałów w dziedzinie czasu (kanał lewy)



czas w sekundach

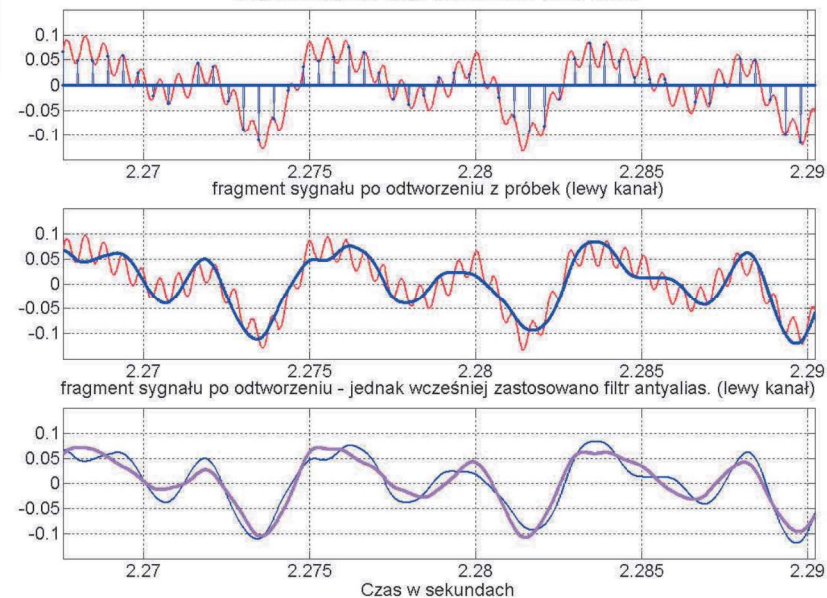
Widma amplitudowe sygnałów (kanał lewy)



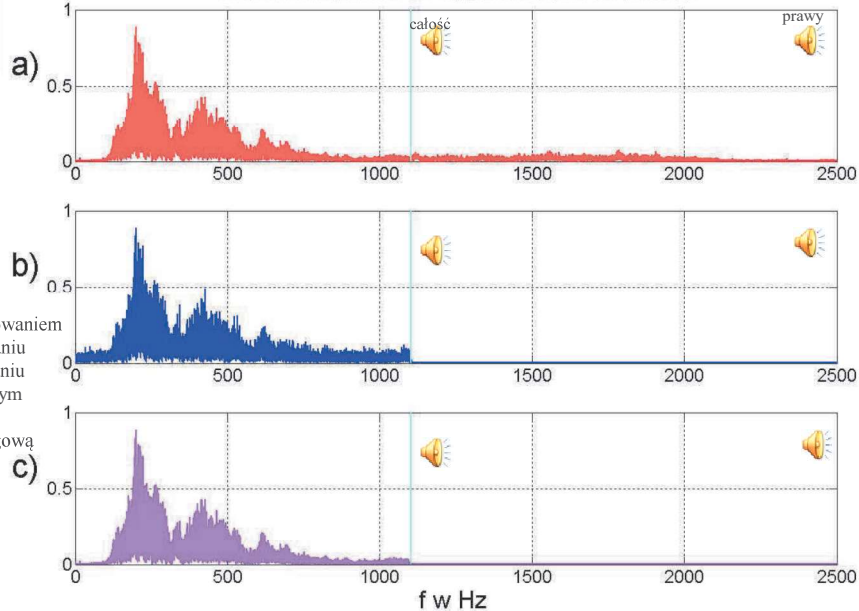
a) przed próbkowaniem
 b) po próbkowaniu
 c) po próbkowaniu
 poprzedzonym
 filtracją
 antyaliasingową

Zakłócenie
 dodano
 tylko do
 kanału
 lewego

fragment sygnału i jego próbkowanie (lewy kanał)

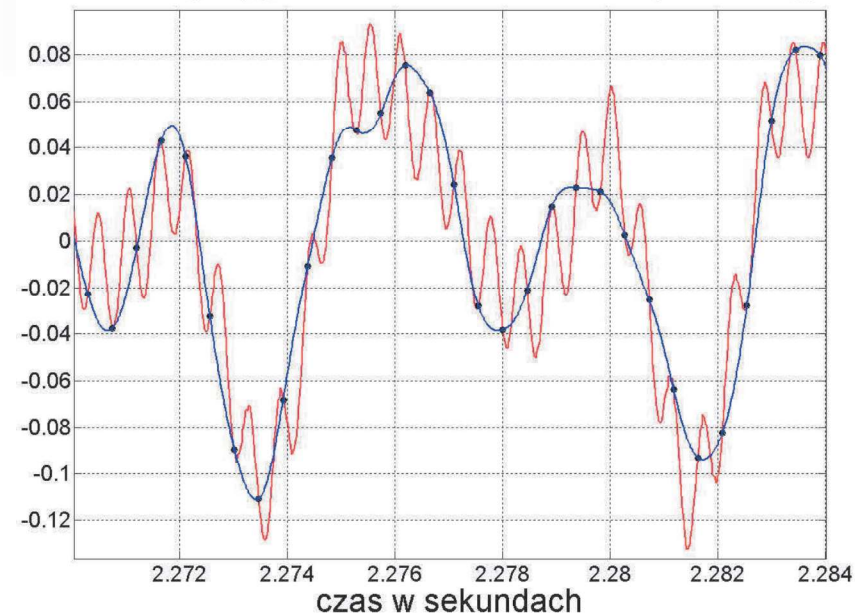


Widma amplitudowe sygnałów (kanał prawy)

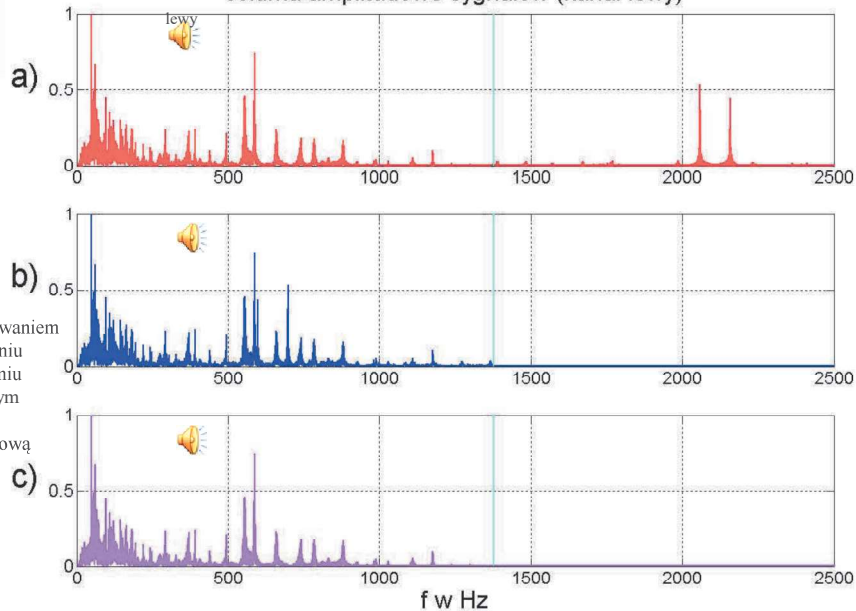


a) przed próbkowaniem
 b) po próbkowaniu
 c) po próbkowaniu
 poprzedzonym
 filtracją
 antyaliasingową

Przebiegi sygnałów w dziedzinie czasu (kanał lewy)



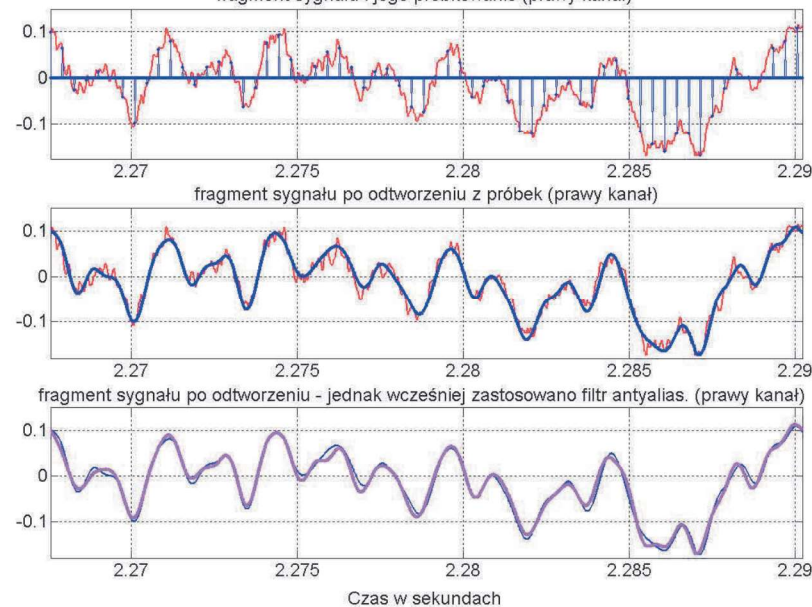
Widma amplitudowe sygnałów (kanał lewy)



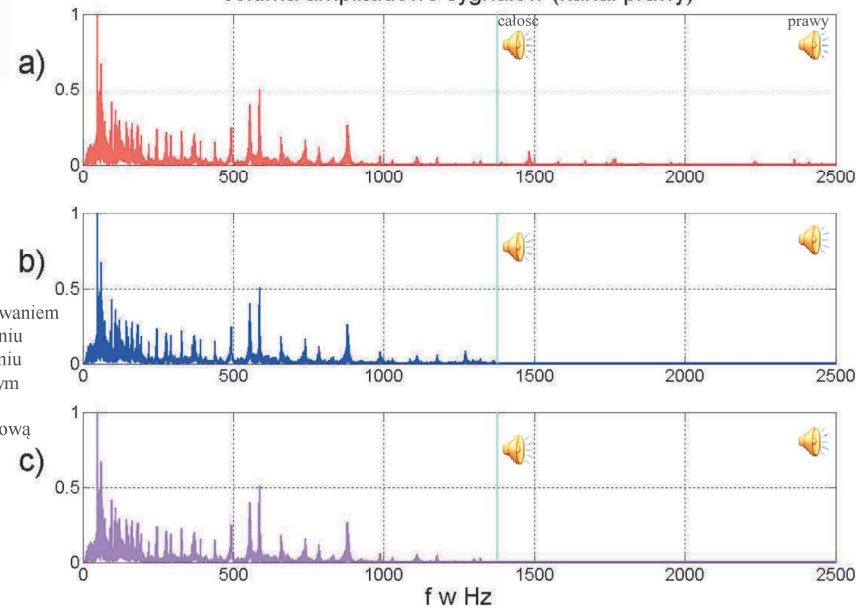
- a) przed próbkowaniem
- b) po próbkowaniu
- c) po próbkowaniu poprzedzonym filtracją antyaliasingową

Zakłócenie dodano tylko do kanału lewego

fragment sygnału i jego próbkowanie (prawy kanał)

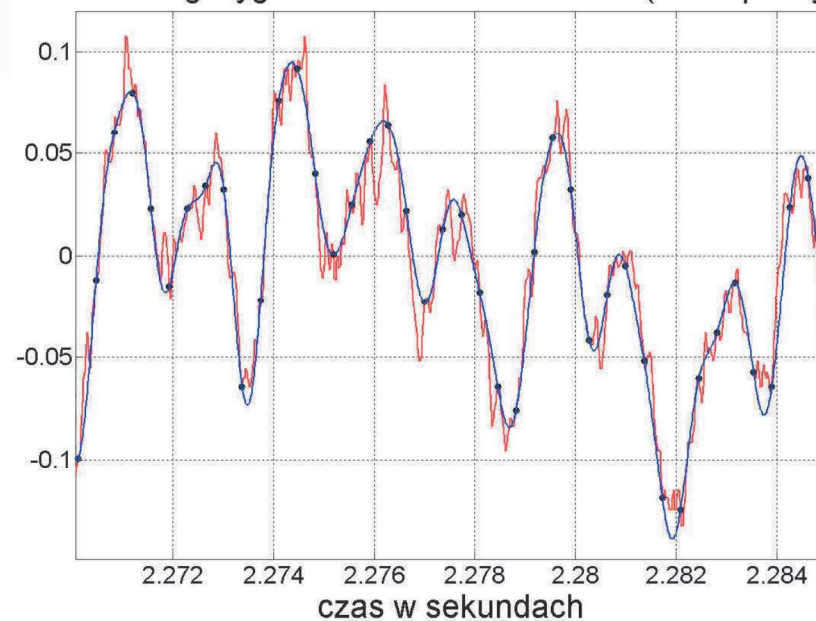


Widma amplitudowe sygnałów (kanał prawy)



- a) przed próbkowaniem
- b) po próbkowaniu
- c) po próbkowaniu poprzedzonym filtracją antyaliasingową

Przebiegi sygnałów w dziedzinie czasu (kanał prawy)



Przykład sygnału dwuwymiarowego



Model matematyczny obrazu analogowego jest odwzorowaniem $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Obraz dyskretny jest zbiorem punktów $\{s(m, n)\}_{m, n}$

zdefiniowanych na dziedzinie $D = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$

3030

Twierdzenie Shanona dla sygnału 2-D

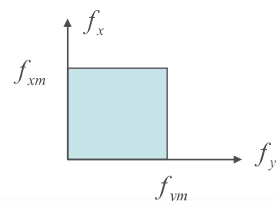
Jeżeli obraz analogowy $s(x, y)$ spełnia następujące warunki:

1) nośnik widma obrazu $\hat{s} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ jest ograniczony, tzn.

$$\hat{s}(f_x, f_y) = 0 \quad \text{jeśli} \quad |f_x| \geq f_{xm} \quad \text{lub} \quad |f_y| \geq f_{ym},$$

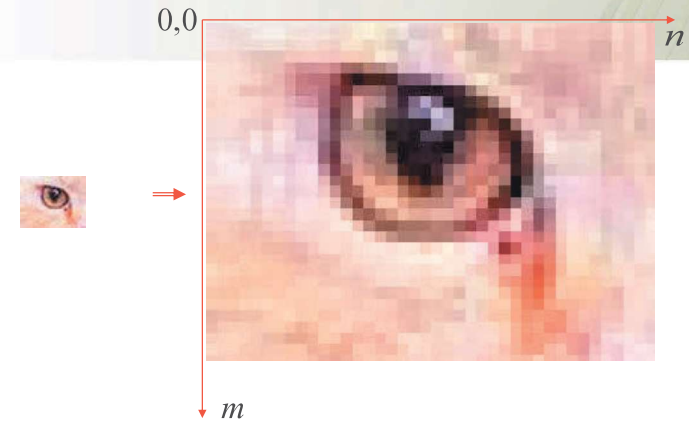
2) próbki obrazu $\{s(m\Delta x, n\Delta y)\}_{m, n=-\infty}^{\infty}$ są pobierane w odstępach Δx i Δy

takich, że $\frac{1}{\Delta x} = f_{xp} \geq 2f_{xm}$ oraz $\frac{1}{\Delta y} = f_{yp} \geq 2f_{ym}$,



32

Model matematyczny dyskretnego obrazu



$$D = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\{s(m, n)\}_{m, n} \quad s \in \mathbb{R}^{M \times N}$$

gdzie: M - ilość linii, N - ilość punktów (pikseli) w linii

31

Twierdzenie Shanona dla sygnału 2-D

Jeżeli obraz analogowy $s(x, y)$ spełnia następujące warunki:

1) nośnik widma obrazu $\hat{s} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ jest ograniczony, tzn.

$$\hat{s}(f_x, f_y) = 0 \quad \text{jeśli} \quad |f_x| \geq f_{xm} \quad \text{lub} \quad |f_y| \geq f_{ym},$$

2) próbki obrazu $\{s(m\Delta x, n\Delta y)\}_{m, n=-\infty}^{\infty}$ są pobierane w odstępach Δx i Δy

takich, że $\frac{1}{\Delta x} = f_{xp} \geq 2f_{xm}$ oraz $\frac{1}{\Delta y} = f_{yp} \geq 2f_{ym}$,

to wtedy obraz analogowy $s(x, y)$ może być zrekonstruowany z obrazu dyskretnego $\{s(m\Delta x, n\Delta y)\}_{m, n=-\infty}^{\infty}$ przy pomocy szeregu

$$s(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(m\Delta x, n\Delta y) \frac{\sin(\pi(x/\Delta x - m)) \sin(\pi(y/\Delta y - n))}{\pi^2(x/\Delta x - m)(y/\Delta y - n)}$$

33