

fourier transform]

- fourier transform **examples** Usuń
- fourier transform **inphographics** Usuń
- fourier transform
- fourier transform **wolfram**
- fourier transform **table**
- fourier transform **calculator**
- fourier transform **infrared spectroscopy**
- fourier transform **properties**
- fourier transform **online**
- fourier transform **of sine**

Szukaj w Google Szczęśliwy traf

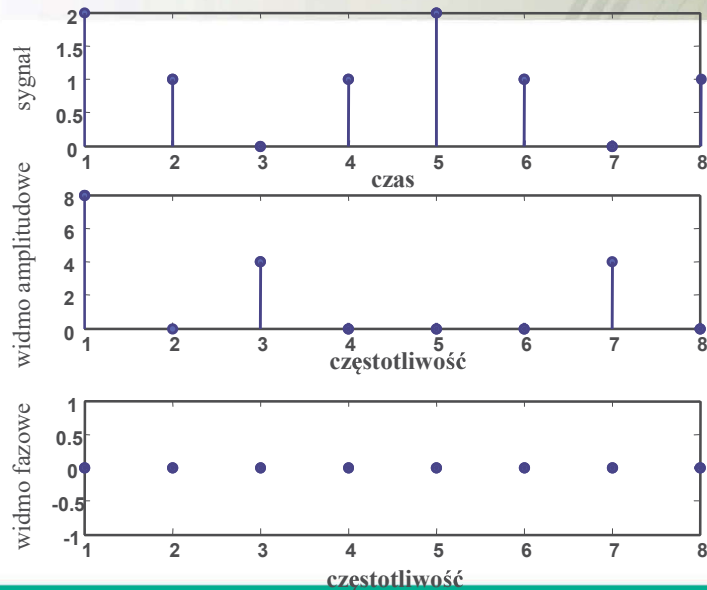
Zgłoś nieodpowiednią odpowiedź

Spis treści

1. Zależności pomiędzy analizą częstotliwościową sygnałów analogowych i dyskretnych
2. Definicja i własności dyskretnej transformacji Fouriera
3. Analiza częstotliwościowa dyskretnych obrazów

Analiza częstotliwościowa sygnałów dyskretnych, czyli DYSKRETNĄ TRANSFORMACJĄ FOURIERA

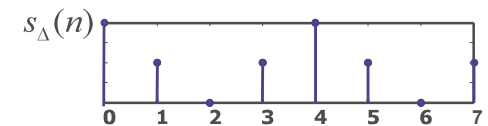
ang. *Discrete Fourier Transform DFT*



Geneza transformacji sygnału jednowymiarowego

Widmo impulsu analogowego

$$\hat{s}_a(f) = \int_0^T s_a(t) e^{-2\pi j f t} dt$$



gdzie T jest czasem trwania sygnału.

Wprowadźmy dyskretyzację $s_\Delta(n) = s_a(n\Delta t)$

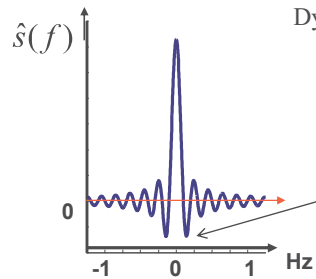
gdzie: $n = 0, 1, \dots, N-1$

N - ilość próbek

gęstość dyskretyzacji $\Delta t = T / (N-1)$

Wartość całki oznaczonej aproksymujemy „metodą prostokątów”

$$\hat{s}_a(f) \approx \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} s_\Delta(n) e^{-2\pi j f n \Delta t}$$



Dyskretne widmo będziemy wyznaczać w punktach

$$f_k = k \Delta f$$

Aby były rozłożone równomiernie i obejmowały zarówno dodatnie jak i ujemne wartości

$$k \in \{-(N-1)/2, -(N-3)/2, \dots, (N-3)/2, (N-1)/2\}$$

(albo $k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$)

Położenie skrajnych punktów musi uwzględniać założenia tw. Shanona i wynikać z powyższych założeń. Otrzymamy zatem dwa warunki

$$\begin{cases} f_{(N-1)/2} = \frac{N-1}{2\Delta t N} < f_m = f_p / 2 \\ f_{(N-1)/2} = \frac{N-1}{2} \Delta f \end{cases}$$

a z nich wynika $\Delta f = \frac{1}{N \Delta t} = \frac{1}{T + \Delta t}$

Przybliżone wartości widma analogowego

$$\hat{s}_a(f) \approx \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} s_\Delta(n) e^{-2\pi j f n \Delta t}$$

obliczamy dla wybranych częstotliwości $f_k = k \Delta f = \frac{k}{N \Delta t}$

otrzymując

$$\hat{s}_a(f_k) \approx \hat{s}_\Delta(k) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} s_\Delta(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

Wprowadzając oznaczenie

$$w = e^{-j \frac{2\pi}{N}} = \cos(2\pi / N) - j \sin(2\pi / N)$$

otrzymujemy wartości widma dyskretnego

$$\hat{s}_\Delta(k) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} s_\Delta(n) w^{kn}$$

Z widma ciągłego odtwarzamy sygnał analogowy

$$s_a(t) = \int_{-f_m}^{f_m} \hat{s}_a(f) e^{2\pi j f t} df$$

Aproksymując wartość całki „metodą prostokątów” spodziewamy się otrzymać dyskretne wartości sygnału

$$s_\Delta(n) = \Delta f \sum_k \hat{s}_\Delta(k) w^{-kn}$$

gdzie

$$w = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$$

$$\hat{s}_\Delta(k) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} s_\Delta(n) w^{kn}$$

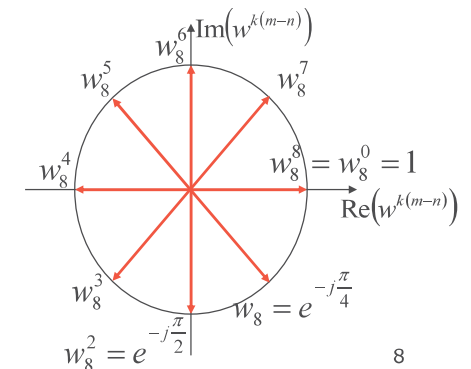
$$s_\Delta(n) = \Delta f \sum_k \hat{s}_\Delta(k) w^{-kn}$$

$$s_\Delta(n) = \frac{1}{N \Delta t} \sum_k \hat{s}_\Delta(k) w^{-kn} = \frac{1}{N \Delta t} \sum_k w^{-kn} \Delta t \left(\sum_{m=0}^{N-1} s_\Delta(m) w^{km} \right) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} s_\Delta(m) \sum_k w^{k(m-n)} = s_\Delta(n)$$

$$\sum_k w^{k(m-n)} = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \neq n \\ N & \text{dla } m = n \end{cases}$$

$$w_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$$



Jakie jest widmo dyskretne sygnału

$$s_{\Delta} = [1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$$

jeśli gęstość próbkowania wynosi

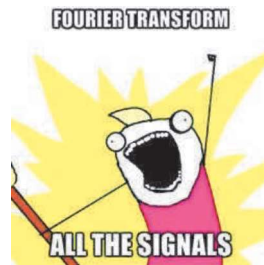
$$\Delta t = 10^{-3} [s]$$

Sygnał posiada $N=6$ próbek. Spodziewamy się, że reprezentuje drgania kosinusoidalne o okresie

$$\tau = 4 \Delta t = 4 \cdot 10^{-3} [s]$$

czyli o częstotliwości

$$f = 250 [Hz].$$



9

Numerory próbek $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Dyskretne widmo ma numerację $k \in \{-2,5; -1,5; -0,5; 0,5; 1,5; 2,5\}$

Gęstość dyskretyzacji w dziedzinie częstotliwości

$$\Delta f = \frac{1}{N \Delta t} = \frac{1}{6 \cdot 10^{-3}} = 500 / 3 [Hz]$$

Zatem widmo dyskretne jest obliczane dla częstotliwości [Hz]

$$\{-1250/3, -250, -250/3, 250/3, 250, 1250/3\}$$

W oparciu o wzór $\hat{s}_{\Delta}(k) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} s_{\Delta}(n) w^{kn}$

gdzie $w = e^{-j\frac{\pi}{3}} = \cos(\pi/3) - j \sin(\pi/3) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} j$

otrzymujemy

$$\hat{s}_{\Delta} = [0 \ 3 \cdot 10^{-3} \ 0 \ 0 \ 3 \cdot 10^{-3} \ 0]^T$$

10

Otrzymaliśmy wzór $\hat{s}_{\Delta}(k) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} s_{\Delta}(n) w^{kn}$

gdzie $w = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = \cos(2\pi/N) - j \sin(2\pi/N)$

czyli

$$\hat{s}_{\Delta}(k) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} s_{\Delta}(n) [\cos(2\pi nk/N) - j \sin(2\pi nk/N)]$$

Funkcje trygonometryczne powodują, że widmo jest funkcją o okresie N , tzn.

$$\hat{s}_{\Delta}(k+N) = \hat{s}_{\Delta}(k)$$

bo

$$\hat{s}_{\Delta}(k) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} s_{\Delta}(n) [\cos(2\pi nk/N + 2\pi n) - j \sin(2\pi nk/N + 2\pi n)]$$

11

Przyjmujemy $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

Skoro $f_k = k \Delta f$

to $[f_k] = [0, \Delta f, 2\Delta f, \dots, (N-1)\Delta f]^T \in \mathbb{R}^N$

Wprowadzamy nową funkcję dyskretną

$$\hat{s}(k) = \frac{\hat{s}_{\Delta}(k)}{\Delta t}$$

Przy tych dwóch założeniach wzór

$$\hat{s}_{\Delta}(k) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} s_{\Delta}(n) w^{kn}$$

przyjmie ostateczną postać dyskretnej transformacji Fouriera.

12

Dyskretna transformacja Fouriera zdefiniowana jest wzorem

$$\hat{s}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n)w^{kn}$$

a odwrotna dyskretna transformacja Fouriera wzorem

$$s(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{s}(k)w^{-kn}$$

Przekształcenie DFT można zapisać macierzowo

gdzie $W = [w^{kn}] \in C^{N \times N}$

$$\hat{S} = W S$$

Elementy macierzy W powstają przez podniesienie do potęgi kn wartości zespolonej

$$w = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = \cos(2\pi / N) - j \sin(2\pi / N)$$

przy czym k jest numerem wiersza a n numerem kolumny. Numeracja rozpoczyna się od zera

bo $k, n \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$

Macierz przekształcenia w odwrotnej dyskretniej transformacji Fouriera

$$S = W^{-1} \hat{S}$$

ma postać

$$W^{-1} = \frac{1}{N} [w^{-kn}] = \frac{1}{N} W^* \in C^{N \times N}$$

13

4. Szerokość widma:

Dla nieparzystej liczby próbek

$$f_{\max} = f_{\frac{N-1}{2}}$$

Dla $N \rightarrow \infty$ otrzymujemy

$$f_{\max} \rightarrow f_p / 2$$

Dla parzystej liczby próbek

$$f_{\max} = f_{\frac{N}{2}} = \frac{1}{2\Delta t}$$

15

1. Zależność pomiędzy widmem dyskretnym a widmem sygnału analogowego

$$\hat{s}(k) \Delta t \approx \hat{s}_a(k\Delta f)$$

2. Liczba dyskretnych wartości widma jest równa liczbie próbek czasowych sygnału.

3. Gęstość dyskretyzacji widma

$$\Delta f = \frac{1}{N \Delta t} = (T + \Delta t)^{-1}$$

gdzie $\Delta t = T / (N - 1)$

14

5. Macierz W jest nieosobliwa i symetryczna, jej elementy są na ogół zespolone a ich moduły są zawsze równe 1. Odwrotna do niej

$$W^{-1} = W^* / N$$

6. Liniowość DFT, tzn. $as_1(n) + bs_2(n) \Leftrightarrow a\hat{s}_1(k) + b\hat{s}_2(k)$

$$\text{bo } W(as_1 + bs_2) = aWs_1 + bWs_2$$

16

Właściwości DFT

7. Przesunięcie w dziedzinie czasu $s(n - n_0) \Leftrightarrow \hat{s}(k) w^{kn_0}$

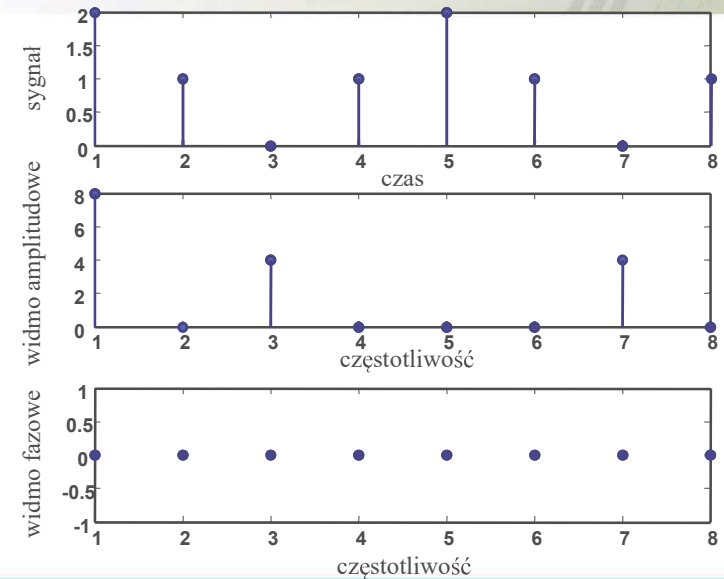
bo
$$\sum_{n=0}^{N-1} s(n - n_0) w^{kn} = w^{kn_0} \sum_{m=-n_0}^{N-n_0-1} s(m) w^{km}$$

8. Modulacja $s_1(n) s_2(n) \Leftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{s}_1(m) \hat{s}_2(k - m)$

9. Zachowanie energii czyli dyskretna postać twierdzenia Parsewala

$$\sum_{n=0}^{N-1} s^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{s}(k)|^2$$

Graficzna prezentacja przykładu DFT



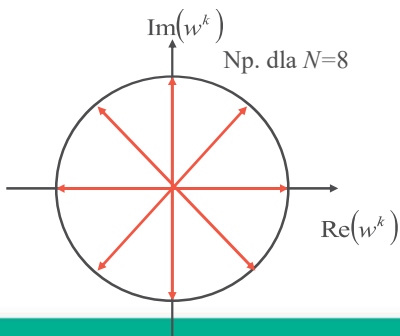
Prezentacja przykładu

Gęstość próbkowania wynosi $\Delta t = 0,001 [s]$.

Jakie jest widmo dyskretne sygnału $s = [2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1]^T$?

Obliczamy $w_8 = e^{-\frac{2\pi j}{8}} = \cos(\pi/4) - j \sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}}$

Podnosząc tę liczbę do potęgi całkowitej otrzymamy tylko jedną z ośmiu możliwości przedstawionych na poniższym rysunku.



$$\searrow = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}}$$

$$\swarrow = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}}$$

$$\nwarrow = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}}$$

$$\nearrow = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}}$$

Macierzowy zapis przykładu

Gęstość próbkowania wynosi $\Delta t = 0,001 [s]$.

Jakie jest widmo dyskretne sygnału $s = [2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1]^T$?

Udowodnimy, że sygnał zawiera składową stałą i drgania o okresie 4 [ms], czyli o częstotliwości

$$f = 250 [Hz]$$

$$\searrow = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}} \quad \swarrow = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}} \quad \nwarrow = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}} \quad \nearrow = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{s}(0) \\ \hat{s}(1) \\ \hat{s}(2) \\ \hat{s}(3) \\ \hat{s}(4) \\ \hat{s}(5) \\ \hat{s}(6) \\ \hat{s}(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \rightarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \leftarrow & \nwarrow & \uparrow & \nearrow \\ \rightarrow & \downarrow & \leftarrow & \uparrow & \rightarrow & \downarrow & \leftarrow & \uparrow \\ \rightarrow & \swarrow & \uparrow & \searrow & \leftarrow & \nearrow & \downarrow & \nwarrow \\ \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow \\ \rightarrow & \nwarrow & \downarrow & \nearrow & \leftarrow & \swarrow & \uparrow & \swarrow \\ \rightarrow & \uparrow & \leftarrow & \downarrow & \rightarrow & \uparrow & \leftarrow & \downarrow \\ \rightarrow & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \leftarrow & \swarrow & \downarrow & \searrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ s(2) \\ s(3) \\ s(4) \\ s(5) \\ s(6) \\ s(7) \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie przykładu

Wyliczamy $\hat{s} = [8 \ 0 \ 4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4 \ 0]^T$

Próbkowanie częstotliwości $\Delta f = \frac{1}{N \Delta t} = 125 [Hz]$

Sygnal ma składową stałą i drgania o częstotliwości $2 \Delta f = 250 [Hz]$

Szerokość widma wynosi $f_{\max} = f_4 = 500 [Hz]$

21

do transformacji obrazów dyskretnych

Przyjmujemy $k_x = 0, 1, 2, \dots, N_x - 1$ oraz $k_y = 0, 1, 2, \dots, N_y - 1$
i wprowadzamy nową funkcję dyskretną

$$\hat{s}(k_x, k_y) = \frac{\hat{s}_\Delta(k_x, k_y)}{\Delta x \Delta y} \approx \frac{\hat{s}(k_x \Delta f_x, k_y \Delta f_y)}{\Delta x \Delta y}$$

Przy tych dwóch założeniach otrzymujemy wzory:

- dyskretnej transformacji Fouriera obrazów

$$\hat{s}(k_x, k_y) = \sum_{n_x=0}^{N_x-1} \sum_{n_y=0}^{N_y-1} s(n_x, n_y) w_x^{n_x k_x} w_y^{n_y k_y}$$

- odwrotnej dyskretnej transformacji Fouriera obrazów

$$s(n_x, n_y) = \frac{1}{N_x N_y} \sum_{k_x=0}^{N_x-1} \sum_{k_y=0}^{N_y-1} \hat{s}(k_x, k_y) w_x^{-n_x k_x} w_y^{-n_y k_y}$$

23

Od dwuwymiarowej transformacji Fouriera

Widmo częstotliwościowe obrazu analogowego zdefiniowane jest wzorem

$$\hat{s}(f_x, f_y) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} s(x, y) e^{-2\pi j(f_x x + f_y y)} dx dy$$

Odtwarzanie obrazu analogowego z jego widma częstotliwościowego dokonywane jest przy pomocy wzoru

$$s(x, y) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \hat{s}(f_x, f_y) e^{2\pi j(f_x x + f_y y)} df_x df_y$$

Wzory te wykorzystamy do wyprowadzenia dyskretnej transformacji sygnałów dwuwymiarowych, czyli 2-D DFT.

22

Macierzowy zapis 2-D DFT

$$\hat{S} = W_x S W_y \quad \boxed{\hat{S}} = \boxed{W_x} \boxed{S} \boxed{W_y}$$

gdzie

$$s = [s(n_x, n_y)] \in \mathbb{R}^{N_x \times N_y}$$

$$\hat{s} = [\hat{s}(k_x, k_y)] \in \mathbb{C}^{N_x \times N_y}$$

$$W_x = [w_x^{n_x k_x}] \in \mathbb{C}^{N_x \times N_x}$$

$$W_y = [w_y^{n_y k_y}] \in \mathbb{C}^{N_y \times N_y}$$

$$k_x, n_x = 0, \dots, N_x - 1$$

$$k_y, n_y = 0, \dots, N_y - 1$$

k_x numer kolumny macierzy

n_y numer kolumny

n_x numer wiersza macierzy

k_y numer wiersza

W_x oraz W_y są macierzami **symetrycznymi**

24

Przykład 2-D DFT

