

# Szybka transformacja Fouriera

## Spis treści

1. Nieefektywność obliczeniowa DFT
2. Usprawnienia zaproponowane przez Cooley'a i Tukey'a
3. Porównanie efektywności DFT i FFT



## Cechy charakterystyczne procedury obliczeniowej DFT

Obliczenia DFT można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \hat{s}(0) \\ \hat{s}(1) \\ \hat{s}(2) \\ \hat{s}(3) \\ \hat{s}(4) \\ \hat{s}(5) \\ \hat{s}(6) \\ \hat{s}(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \rightarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \leftarrow & \nearrow & \uparrow & \nearrow \\ \rightarrow & \downarrow & \leftarrow & \uparrow & \rightarrow & \downarrow & \leftarrow & \uparrow \\ \rightarrow & \swarrow & \uparrow & \searrow & \leftarrow & \nearrow & \downarrow & \swarrow \\ \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow \\ \rightarrow & \swarrow & \downarrow & \nearrow & \leftarrow & \searrow & \uparrow & \swarrow \\ \rightarrow & \uparrow & \leftarrow & \downarrow & \rightarrow & \uparrow & \leftarrow & \downarrow \\ \rightarrow & \nearrow & \uparrow & \swarrow & \leftarrow & \swarrow & \downarrow & \searrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ s(2) \\ s(3) \\ s(4) \\ s(5) \\ s(6) \\ s(7) \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\searrow = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}} \quad \swarrow = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}} \quad \nearrow = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}} \quad \swarrow = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}}$$



## Przykład dublowania obliczeń

Obliczenia DFT można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \hat{s}(0) \\ \hat{s}(1) \\ \hat{s}(2) \\ \hat{s}(3) \\ \hat{s}(4) \\ \hat{s}(5) \\ \hat{s}(6) \\ \hat{s}(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \rightarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow & \leftarrow & \nearrow & \uparrow & \nearrow \\ \rightarrow & \downarrow & \leftarrow & \uparrow & \rightarrow & \downarrow & \leftarrow & \uparrow \\ \rightarrow & \swarrow & \uparrow & \searrow & \leftarrow & \nearrow & \downarrow & \swarrow \\ \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow \\ \rightarrow & \swarrow & \downarrow & \nearrow & \leftarrow & \searrow & \uparrow & \swarrow \\ \rightarrow & \uparrow & \leftarrow & \downarrow & \rightarrow & \uparrow & \leftarrow & \downarrow \\ \rightarrow & \nearrow & \uparrow & \swarrow & \leftarrow & \swarrow & \downarrow & \searrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ s(2) \\ s(3) \\ s(4) \\ s(5) \\ s(6) \\ s(7) \end{bmatrix}$$

Wynika stąd

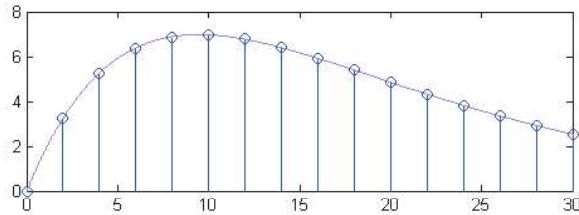
$$\begin{aligned} \hat{s}(0) &= s(0) + s(2) + s(4) + s(6) + (s(1) + s(3) + s(5) + s(7)) \\ \hat{s}(4) &= s(0) + s(2) + s(4) + s(6) - (s(1) + s(3) + s(5) + s(7)) \end{aligned}$$

# Nakład obliczeniowy dla dyskretnej transformacji Fouriera

Dyskretne widmo jest obliczane przy pomocy wzoru

$$\hat{s}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n)w_N^{kn} \quad \text{gdzie} \quad w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$2N^2$  mnożeń bo: jest  $N$  składników sumy (ze względu na  $n$ ), jest  $N$  równań (ze względu na  $k$ ) i są to mnożenia liczb rzeczywistych przez zespolone.



# Cooley i Tukey 1965 rok podział w dziedzinie częstotliwości

Dla poprawy efektywności, przeprowadźmy obliczenia osobno dla próbek o numerach parzystych i osobno o numerach nieparzystych. Otrzymamy

$$\begin{aligned} \hat{s}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} s(n)w_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} s(2n)w_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} s(2n+1)w_N^{(2n+1)k} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} s(2n)w_{N/2}^{kn} + w_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} s(2n+1)w_{N/2}^{kn} \end{aligned}$$

$$\hat{s}(k) = \hat{s}_p(k) + w_N^k \hat{s}_n(k) \quad \text{dla } k \in \{0, 1, \dots, N/2-1\}$$

gdzie  $w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  natomiast  $w_{N/2} = e^{-j\frac{4\pi}{N}}$

A co z wartościami dla  $k \in \{N/2, \dots, N-1\}$ ?

# Cooley i Tukey 1965 rok

ale wcześniej Gauss!

[http://www.cis.rit.edu/class/simg716/Gauss\\_History\\_FFT.pdf](http://www.cis.rit.edu/class/simg716/Gauss_History_FFT.pdf)

Dla poprawy efektywności, przeprowadźmy obliczenia osobno dla próbek o numerach parzystych i osobno o numerach nieparzystych. Otrzymamy

A co z wartościami dla  $k \in \{N/2, \dots, N-1\}$ ?

# Okresowość widm dyskretnych

Otrzymaliśmy  $\hat{s}(k) = \hat{s}_p(k) + w_N^k \hat{s}_n(k)$

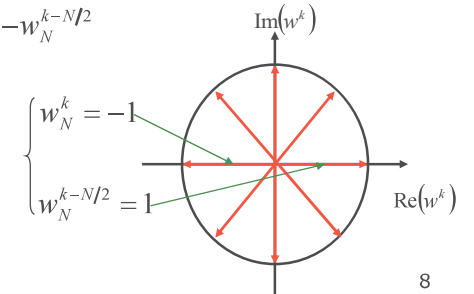
Widma zarówno dla próbek o numerach parzystych jak i nieparzystych są funkcjami okresowymi, tzn.

$$\begin{cases} \hat{s}_p(k) = \hat{s}_p(k - N/2) \\ \hat{s}_n(k) = \hat{s}_n(k - N/2) \end{cases}$$

Dodatkowo zauważmy, że

$$w_N^k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = -e^{-j\frac{2\pi}{N}k} e^{j\pi} = -e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-N/2)} = -w_N^{k-N/2}$$

Jeśli na przykład  $k = 4$  i  $N = 8$ , to



## Wzór wynikający z okresowości funkcji dyskretnych

Z warunków

$$\begin{cases} \hat{s}_p(k) = \hat{s}_p(k - N/2) \\ \hat{s}_n(k) = \hat{s}_n(k - N/2) \end{cases} \quad \text{oraz} \quad w_N^k = -w_N^{k-N/2}$$

wynika, że

$$\hat{s}(k) = \hat{s}_p(k) + w_N^k \hat{s}_n(k)$$

jest równoważne

$$\hat{s}(k) = \begin{cases} \hat{s}_p(k) + w_N^k \hat{s}_n(k) & \text{dla } k = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \\ \hat{s}_p(k - N/2) - w_N^{k-N/2} \hat{s}_n(k - N/2) & \text{dla } k = N/2, \dots, N - 1. \end{cases}$$

9

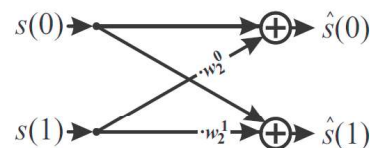
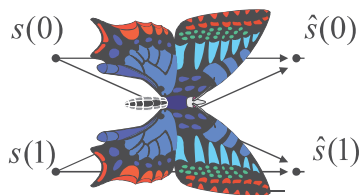
## Szybka transformacja Fouriera

ang. Fast Fourier Transform - FFT

Dla zwiększenia efektywności obliczeń, przedstawiony schemat można zastosować do obliczenia widm dla próbek parzystych i nieparzystych, a również i dalej. Wymaga to dzielenia ilości próbek przez 2. Cooley i Tukey przyjęli  $N = 2^M$ . Stosując  $M$ -krotnie podział na próbki o numerach parzystych i nieparzystych, na końcu otrzymujemy dla  $N = 2$

$$\hat{s}(0) = s(0) + s(1)$$

$$\hat{s}(1) = s(0) - s(1)$$



11

## Efektywność algorytmu

Ilość mnożeń w otrzymanym wzorze

$$\hat{s}(k) = \begin{cases} \hat{s}_p(k) + w_N^k \hat{s}_n(k) & \text{dla } k = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \\ \hat{s}_p(k - N/2) - w_N^{k-N/2} \hat{s}_n(k - N/2) & \text{dla } k = N/2, \dots, N - 1. \end{cases}$$

wynosi  $N^2 + 2N$

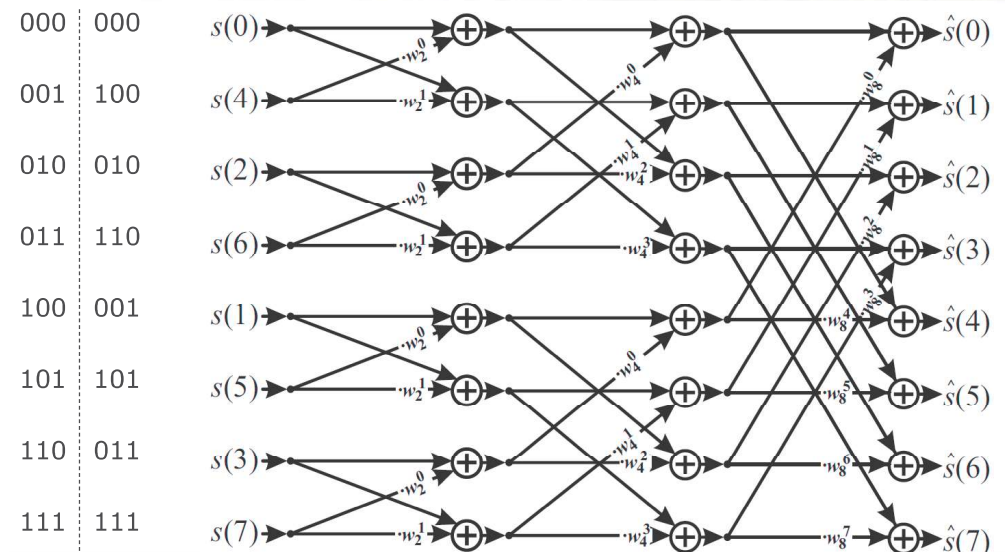
bo zarówno  $\hat{s}_p(k)$  jak i  $\hat{s}_n(k)$  dla  $k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$  wymaga  $2(N/2)^2$  mnożeń i dodatkowo trzeba wykonać  $4(N/2)$  mnożeń dla  $w_N^k \hat{s}_n(k)$  (mnożenie liczb zespolonych!).

Przedstawiony algorytm jest bardziej efektywny jeśli spełniona jest nierówność  $2N^2 > N^2 + 2N$

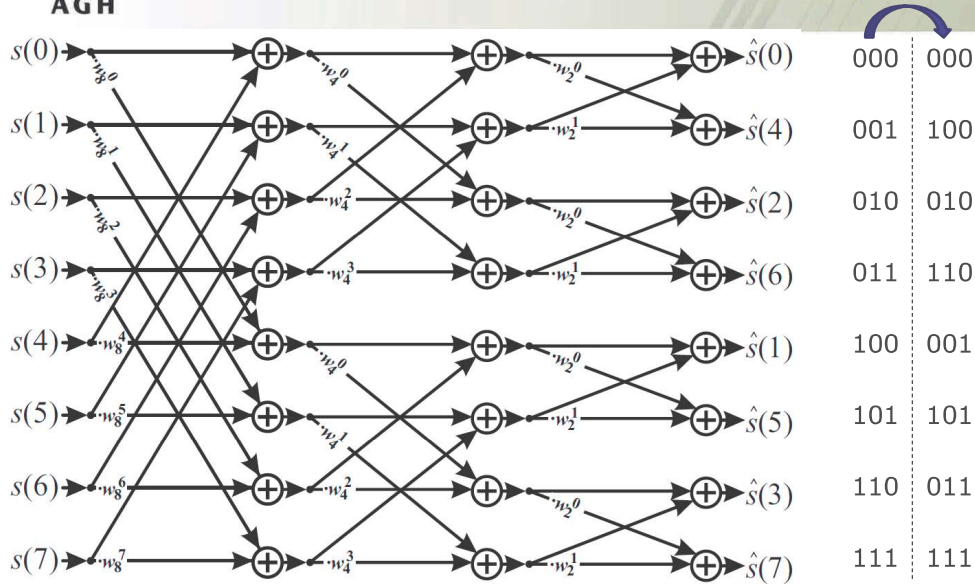
czyli musi być  $N > 2$ , a przecież tak jest zawsze!

10

## Schemat motylkowy FFT z podziałem w dziedzinie czasu, $N=8$



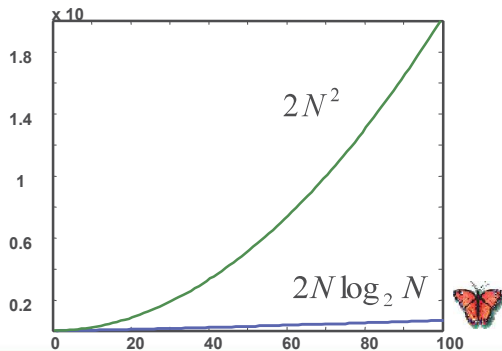
## FFT, podział w dziedzinie częstotliwości



## Porównanie efektywności DFT i FFT

Ilość mnożeń DFT i FFT dla  $N$  próbek

$N$		4	8	16	32	64	128
$2N^2$		32	128	512	2048	8192	32768
$2N \lg_2 N$		16	48	128	320	768	1792



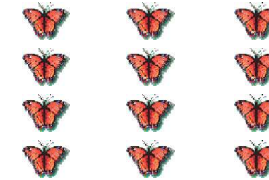
## Efektywność operacji motylkowych

Ilość próbek  $N = 2^M$ .

Poziomów jest  $M = \lg_2 N$  a na każdym z nich  $N/2$  operacji motylkowych.

Czyli ostatecznie mnożeń (na ogół liczb zespolonych) jest  $4M \frac{N}{2} = 2N \log_2 N$

Reasumując, ilość mnożeń w dyskretnej transformacji Fouriera jest proporcjonalna do drugiej potęgi ilości próbek a w szybkiej transformacji Fouriera proporcjonalna do iloczynu ilości próbek i logarytmu z ilości próbek.



$$DFT \sim N^2$$

$$FFT \sim N \log_2 N$$