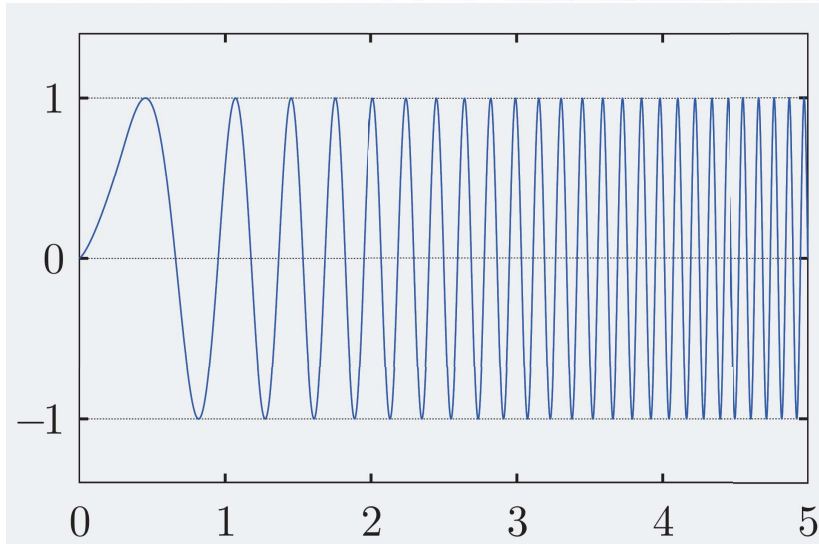
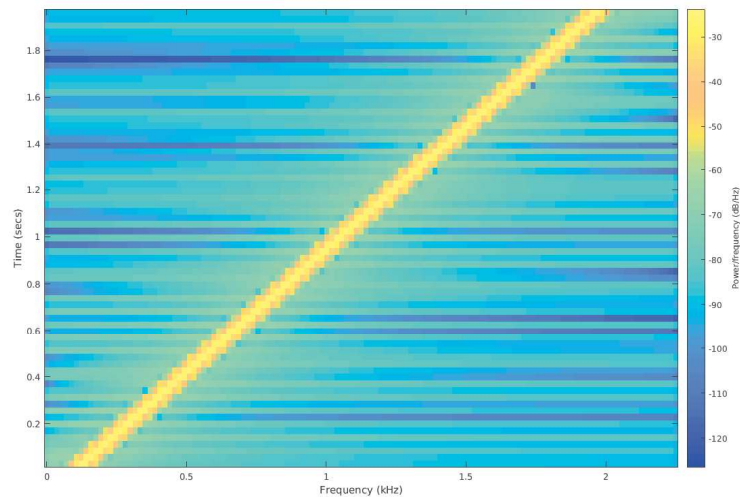
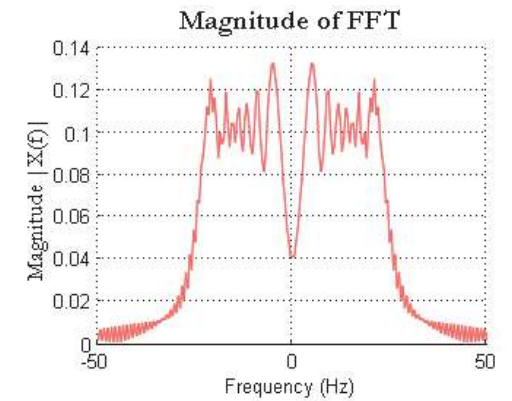
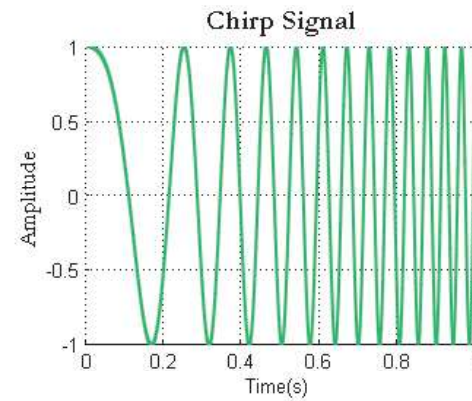


Analiza widmowa sygnałów zmiennych



Chirp Signal

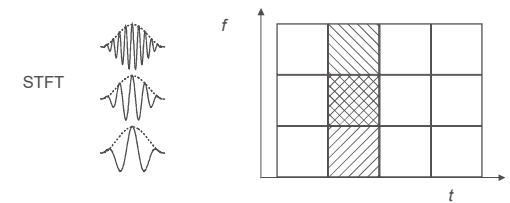


Krótkoczasowa transformacja Fouriera STFT ang. *Short-Time Fourier Transform*

$$\hat{s}^w(f, b) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t-b)s(t)e^{-2\pi jft} dt$$

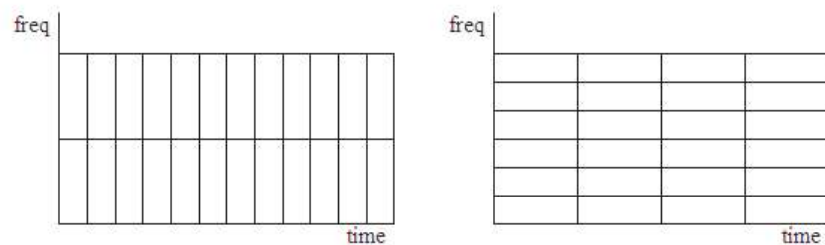
$$\hat{s}^w[k, l] = \sum_{n=0}^{N-1} w[n-l]s[n]e^{-2\pi j \frac{nk}{N}}$$

$$\hat{s}^w[k, l] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \left(w[n-l]e^{-2\pi j \frac{nk}{N}} \right)$$

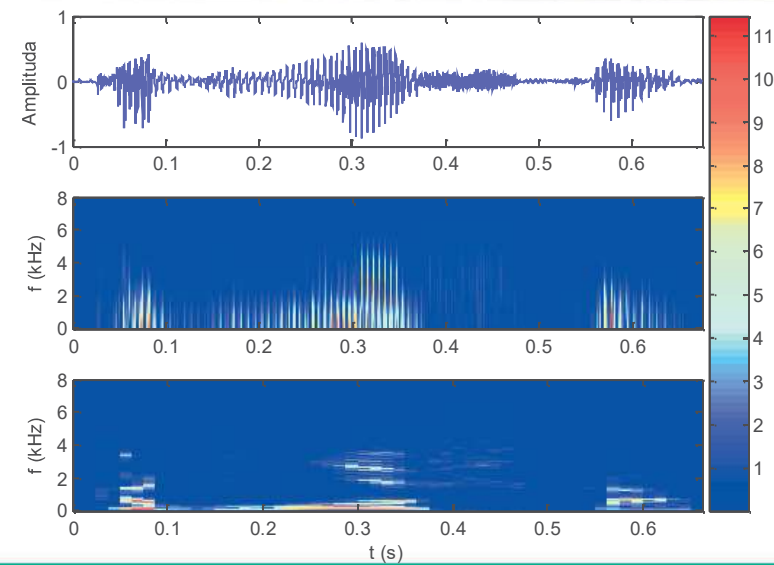


$$w_T(t) = \begin{cases} 0.53836 - 0.46164 \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right), & \text{dla } |t| \leq T \\ 0, & \text{dla } |t| > T \end{cases}$$

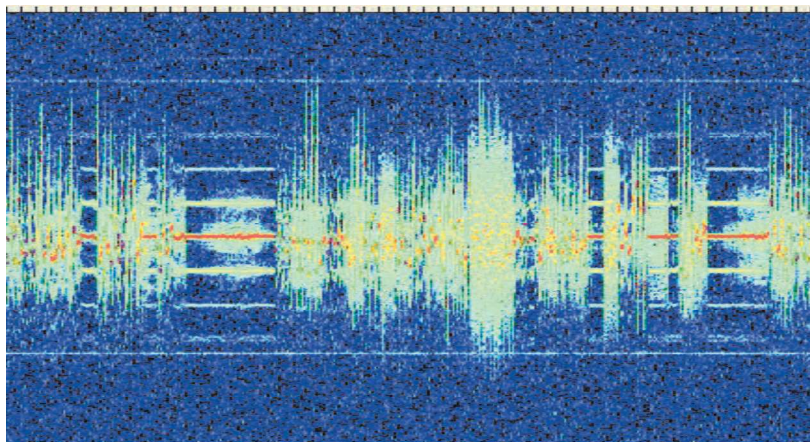
Krótkie a długie okna czasowe



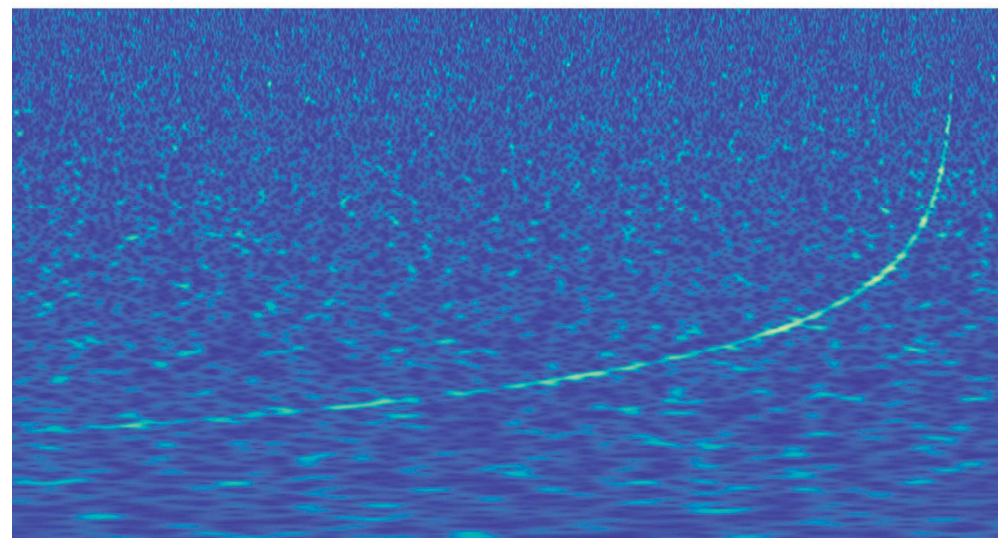
Krótkoczasowa transformacja Fouriera STFT sygnału mowy (/Agnieszka/)



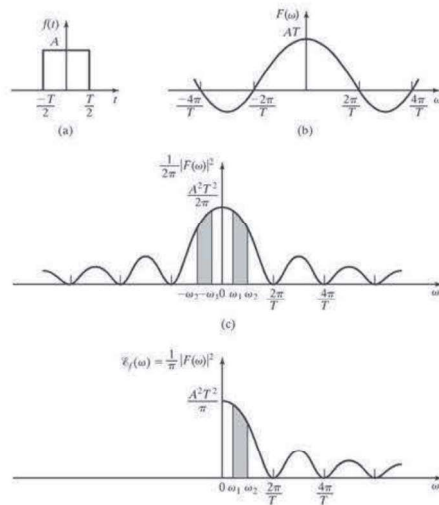
Przykład sygnału radiowego FM (88 MHz)



Spectrogram of Gravitational wave signal



- Kiedy energia sygnału skoncentrowana jest wokół jednej chwili czasowej (np. impuls)
- Kiedy energia jest ograniczona



$$S_{xx}(f) = |\hat{x}(f)|^2$$

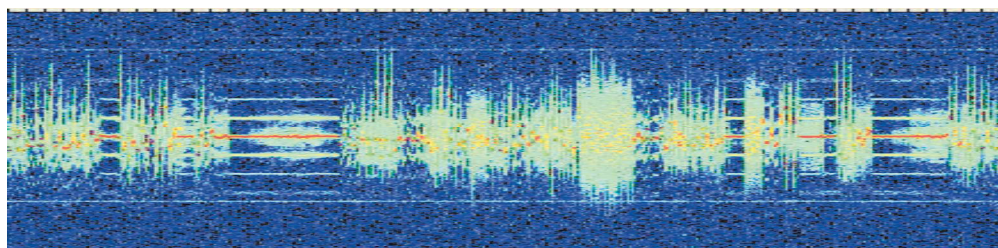
$$S_{xx}(f) = |\hat{x}(f)|^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(f)|^2 df$$

$$S_{xx}(f) = (\Delta t)^2 \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-2\pi i f n \Delta t} \right|^2 = \hat{x}_d(f) \hat{x}_d^*(f)$$

- Kiedy sygnał jest o zmiennej charakterystyce
- Źródłem sygnału jest np. proces stacjonarny, proces losowy, proces stochastyczny

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[|\hat{x}(\omega)|^2 \right]$$



$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[|\hat{x}(\omega)|^2 \right]$$

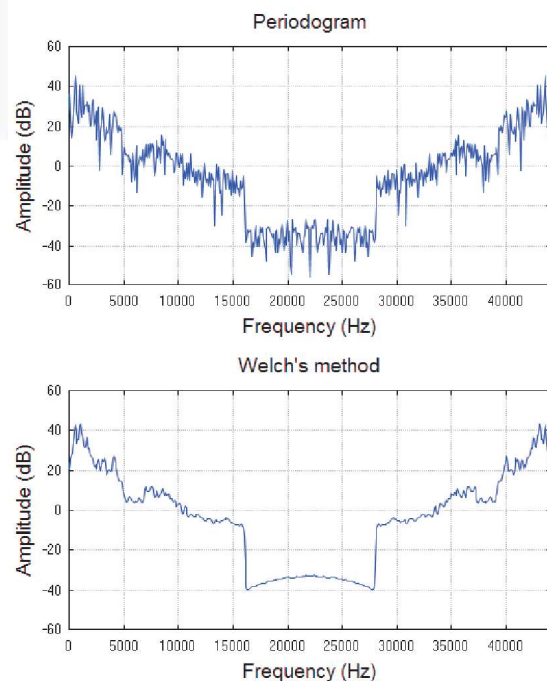
$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[|\hat{x}(\omega)|^2 \right] &= \mathbf{E} \left[\frac{1}{T} \int_0^T x^*(t) e^{i\omega t} dt \int_0^T x(t') e^{-i\omega t'} dt' \right] = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T \mathbf{E} [x^*(t) x(t')] e^{i\omega(t-t')} dt dt' \end{aligned}$$

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau = \hat{R}_{xx}(\omega)$$

- Służy do estymacji PSD (zlokalizowanej w czasie)
- Analizuje charakterystykę amplitudową
- Definicja teoretyczna

$$\mathcal{F}\{x(t) * x(-t)\} = X(f) \cdot X^*(f) = |X(f)|^2$$

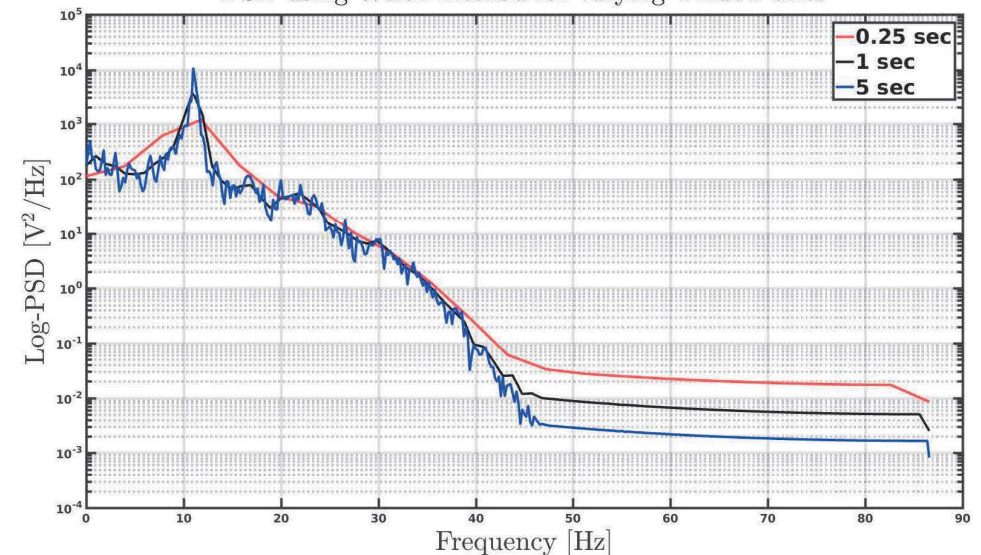
- W praktyce: estymata – metoda Welch'a
- Redukuje szum estymaty kosztem rozdzielczości częstotliwościowej
- Na podstawie spektrogramu
- Jest wiele innych metod (

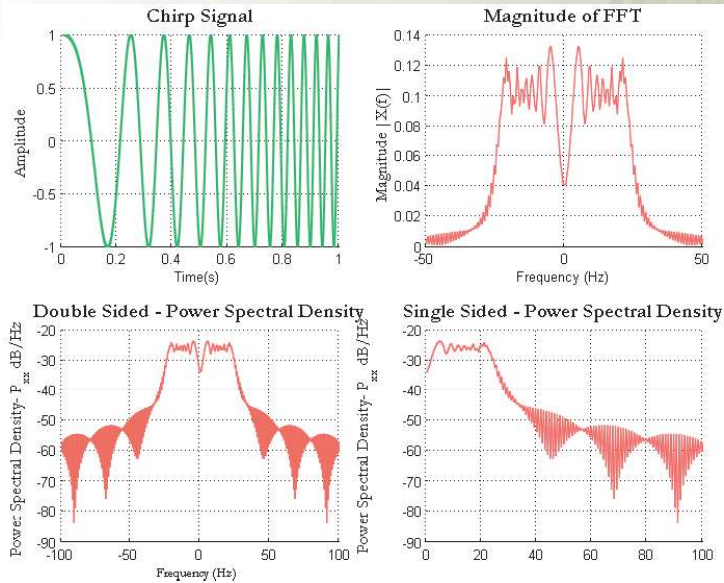


Estymacja widmowej gęstości mocy (PSD) sygnału stacjonarnego

1. Ramkowanie sygnału
 - z zakładką 50% (*overlapping*)
 - lub bez zakładki (0%)
 2. Okienkowanie ramek (np. Hamming)
 3. Obliczenie DFT każdej ramki
 4. Obliczenie kwadratu amplitud (energii), *każda ramka staje się estymatą krótkiego periodogramu*
 5. Uśrednienie wszystkich ramek (czyli policzenie wartości oczekiwanej z równomiernego rozkładu)
- Uzyskujemy estymatę widmowej gęstości mocy sygnału

PSD using Welch method for varying window sizes





Zadanie domowe: PSD vs $|DFT|^2$

- Pokazać jak zmienia się różnica między PSD (metoda Welch) a $|DFT|^2$ dla sygnału mowy o co raz większej długości
1. Przygotować nagranie ciągłej mowy **mono** o długości przynajmniej 1 min (np. czytając coś)
 2. Resamplować do $f_{\max}=8\text{kHz}$ ($f_p=16\text{kHz}$)
 3. Obliczyć i wyświetlić spektrogram (amplituda ST-FFT), z ramką 512 próbek (lub 256 lub 1024 – co ciekawsze, Matlab: spectrogram(x) – uwaga na odpowiednie argumenty sterujące)
 4. Dla każdej różnej dobranej długości sygnału (1s, 2s, 5s, 10s, 20s, 60s) wyznaczyć PSD (ze spektrogramu) i $|DFT|^2$ (z sygnału)
 5. Porównać znormalizowane wykresy (PSD i DFT^2) z punktu 4. na jednym wykresie (ze wspólną osią częstotliwości (OX w kHz) i log-energii (OY))
 6. Który wykres najlepiej oddaje ogólną statystyczną charakterystykę częstotliwościową mowy?
 7. Można przeprowadzić podobną analizę dla takiego samego nagrania ale w obecności źródła szumu