Z-TRANSFORMACJA

Spis treści

Definicja *z*-transformacji

Z-transformata jest szeregiem Laurenta

$$\bar{s}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) z^{-n}$$

gdzie:

$s(n)$ są wartościami dyskretnego sygnału,

z jest zmienną zespoloną, tzn. $z \in C$

Transformacja odwrotna

$$s(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_K \bar{s}(z) z^{n-1} dz$$

Transformata impulsu Diraca

Korzystając z definicji z-transformacji

$$\bar{s}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) z^{-n}$$

można wyliczyć z-transformatę dla dyskretnego impulsu Diraca

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 0 \\ 0 & \text{dla} \quad n \neq 0 \end{cases}$$

Natychmiast otrzymujemy

$$\bar{\delta}(z) = 1$$

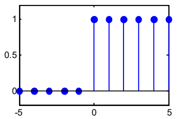
a obszar zbieżności jest zbiorem liczb zespolonych, czyli

$$z \in C$$

Transformata skoku jednostkowego

Aby obliczyć z-transformatę skoku jednostkowego

$$u(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad n < 0 \\ 1 & \text{dla} \quad n \geq 0 \end{cases}$$



skorzystamy z definicji

$$\bar{s}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) z^{-n}$$

Otrzymujemy szereg geometryczny

$$\bar{u}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots$$

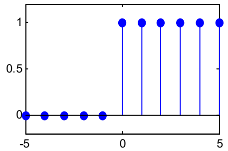
którego pierwszym wyrazem jest $a_1 = 1$ a ilorazem $q = z^{-1}$

Szereg ten jest zbieżny do

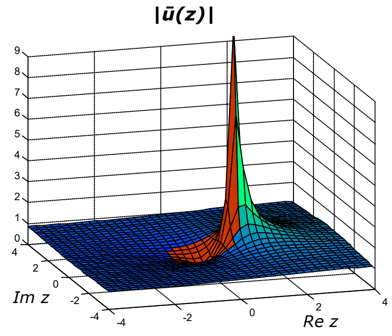
$$\bar{u}(z) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} z^{-n} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{z}{z-1}$$

Warunek zbieżności $|q| < 1$ wyznacza obszar zbieżności $|z| > 1$

Graficzna prezentacja z-transformaty skoku jednostkowego



$$u(n)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad n<0\\ 1 & \text{dla} \quad n\geq 0\end{cases}$$



$$\bar{u}(z)=\frac{z}{z-1}$$ dla **$|z|>1$**

Kolejny przykład transformaty

Do obliczenia z-transformaty dla sygnału

$$s(n)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad n<0\\ a^n & \text{dla} \quad n\geq 0\end{cases} = a^n u(n)$$

posłużymy się definicją $\bar{s}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)z^{-n}$

otrzymując $\bar{s}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^n$

Jest to szereg geometryczny zbieżny do $\bar{s}(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}}$

Z warunku zbieżności $q=a/z$ wynika obszar zbieżności

$$|z|>|a|$$

Szczególny przypadek poprzedniego przykładu

Szczególnym przypadkiem sygnału

$$s(n)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad n<0\\ a^n & \text{dla} \quad n\geq 0\end{cases} = a^n u(n)$$

jest $s(n)=0{,}8^n$ dla n = 0, 1, 2, ...

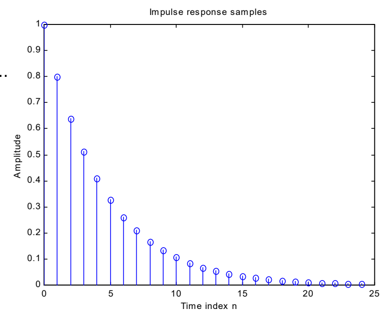
Korzystając z otrzymanego wzoru

$$\bar{s}(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

otrzymujemy

$$\bar{s}(z)=\frac{1}{1-0{,}8z^{-1}}=\frac{z}{z-0{,}8}$$

z obszarem zbieżności $|z|>0{,}8$



Liniowość z-transformacji

Z-transformacja $\bar{s}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)z^{-n}$ jest operacją **liniową**, bo dla liniowej kombinacji dwóch sygnałów $s(n)=as_1(n)+bs_2(n)$ otrzymujemy taką samą liniową kombinację transformat $\bar{s}(z)=a\bar{s}_1(z)+b\bar{s}_2(z)$ z obszarem zbieżności $z\in R_1\cap R_2$ gdzie R_1 jest obszarem zbieżności transformaty pierwszego, a R_2 drugiego sygnału.

Dowód opiera się na podstawieniu kombinacji dwóch sygnałów do wzoru $\bar{s}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)z^{-n}$ definiującego z-transformację, czyli

$$\bar{s}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(as_1(n)+bs_2(n)\right)z^{-n}=a\sum_{n=-\infty}^{\infty}s_1(n)z^{-n}+b\sum_{n=-\infty}^{\infty}s_2(n)z^{-n}$$

Transformata sygnału przesuniętego

Oznaczmy parę sygnał-transformata w następujący sposób $s(n) \Leftrightarrow \bar{s}(z)$

wtedy parę sygnał przesunięty i jego *z*-transformatę można zapisać w postaci

$$s(n-n_0) \Leftrightarrow z^{-n_0}\bar{s}(z)$$

Przesunięcie sygnału w dziedzinie czasu oznacza pomnożenie *z*-transformaty przez

$$z^{-n_0}$$

Dowód opiera się na podstawieniu sygnału przesuniętego do wzoru $\bar{s}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) z^{-n}$ definiującego *z*-transformację, czyli

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n-n_0) z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m) z^{-m-n_0} = z^{-n_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m) z^{-m} = \bar{s}(z) z^{-n_0}$$

Transformacja splotu

Zależność pomiędzy sygnałem będącym splotem dwóch sygnałów a jego *z*-transformatą ma postać

$$\boxed{s(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1(k) s_2(n-k) \Leftrightarrow \bar{s}(z)=\bar{s}_1(z)\bar{s}_2(z)}$$

Obszar zbieżności jest częścią wspólną obszarów zbieżności transformat obu splatanych sygnałów, tzn. $z \in R_1 \cap R_2$

Dowód opiera się na podstawieniu splotu dwóch sygnałów do wzoru definiującego *z*-transformację i odpowiednich przekształceniach

$$\bar{s}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1(k) s(n-k) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_2(n-k) z^{-n} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1(k) z^{-k} \bar{s}_2(z) = \bar{s}_1(z)\bar{s}_2(z)$$

Związek *z*-transformacji z transformacją Fouriera

$$\bar{s}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) z^{-n}$$

$$\hat{s}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-2\pi j f t} dt$$

$$\hat{s}(f) \approx \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) e^{-2\pi j f n \Delta t}$$

$$\bar{s}(z)\Big|_{z=e^{2\pi j f \Delta t}} \approx \frac{\hat{s}(f)}{\Delta t}$$

$$f_p = \frac{1}{\Delta t} \Rightarrow \underline{f} = \frac{f}{f_p} = f\Delta t$$

$$|z| = 1 \Leftrightarrow z = e^{2\pi j f \Delta t} = e^{2\pi j \underline{f}}$$

Transformacja ciągła

$$\hat{s}(k)=\sum_{n=0}^{N-1} s(n) w^{kn} \quad \text{gdzie} \quad w = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

czyli

$$z = w^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$$

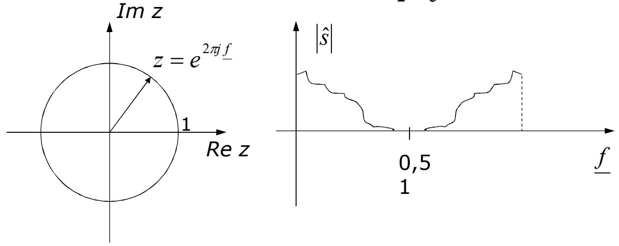
Zatem

$$\hat{s}(k) = \bar{s}(z)\Big|_{z=e^{2\pi jk/N}}$$

dyskretna

Związek *z*-transformaty z transformatą Fouriera

$$z = e^{2\pi j \underline{f}}$$



z- transformacja

transformacja Fouriera

Z-transformacja sygnału dwuwymiarowego

$$\bar{s}(z_x, z_y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(m,n) z_x^{-m} z_y^{-n}$$

$$(z_x, z_y) \in C^2 \qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s(m,n)| |z_x|^{-m} |z_y|^{-n} < \infty$$

13