

FILTRY ZE SKOŃCZONĄ ODPOWIEDZIĄ IMPULSOWĄ

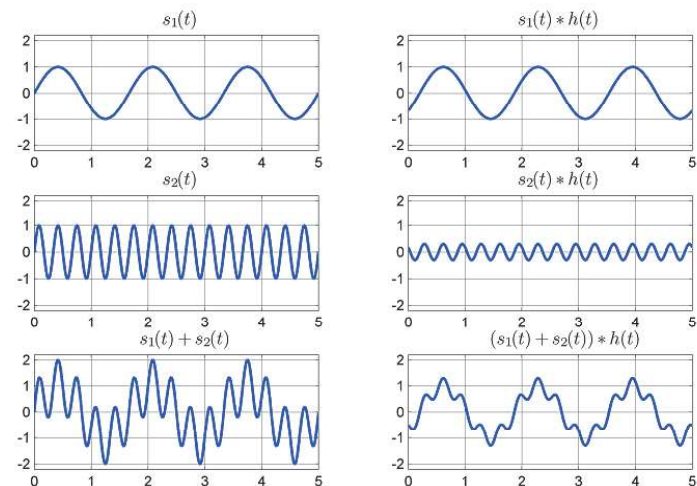
AGH FIR od ang. Finite Impulse Response

1. Definicja filtru FIR
2. Charakterystyki częstotliwościowe
3. Filtry FIR z liniową charakterystyką fazową
4. Optymalizacyjne metody projektowania filtrów FIR
5. Filtry 2-D FIR

1



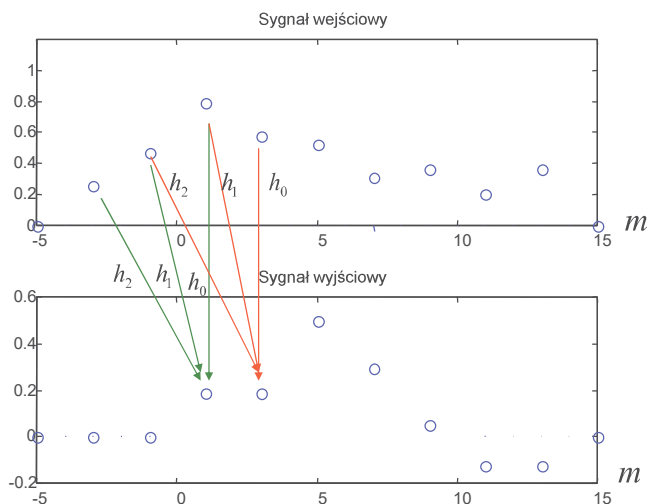
Przykład filtracji dolnoprzepustowej



2



Graficzna prezentacja filtracji



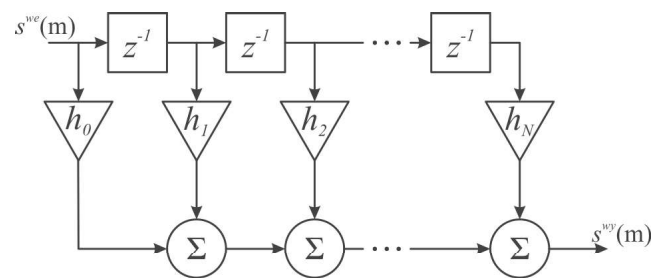
N – rząd filtru

$$s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^N h_n s^{we}(m-n)$$

3



Graficzna prezentacja filtracji

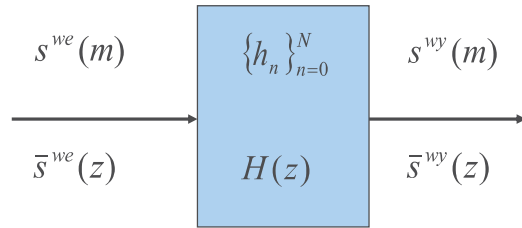


$$s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^N h_n s^{we}(m-n)$$

N – rząd filtru

4

Definicja filtru FIR w dziedzinie czasu



$$s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^N h_n s^{we}(m-n)$$

$$s^{wy}(m) = h_m * s^{we}(m)$$

5

Definicja filtru FIR w z-dziedzinie

$$s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^N h_n s^{we}(m-n)$$

$$\begin{aligned} \bar{s}^{wy}(z) &= \sum_m s^{wy}(m) z^{-m} = \sum_m \sum_{n=0}^N h_n s^{we}(m-n) z^{-m} = \\ &= \sum_{n=0}^N h_n \sum_m s^{we}(m-n) z^{-m} = \sum_{n=0}^N h_n z^{-n} \bar{s}^{we}(z) = \bar{s}^{we}(z) \sum_{n=0}^N h_n z^{-n} \end{aligned}$$

$$\bar{s}^{wy}(z) = H(z) \bar{s}^{we}(z)$$

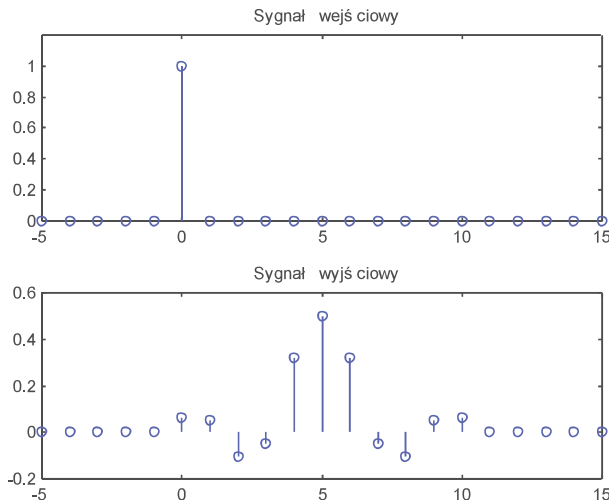
$$H(z) = \sum_{n=0}^N h_n z^{-n}$$

$$H(z) = \frac{\bar{s}^{wy}(z)}{\bar{s}^{we}(z)}$$

6

Filtracja dyskretnego impulsu Diraca

Dyskretny impuls Diraca $\Rightarrow h_0, h_1, h_2, \dots, h_N, 0, 0, \dots$



$$s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^N h_n s^{we}(m-n)$$

8

Liniowość filtrów FIR

$$s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^N h_n s^{we}(m-n)$$

$$s^{we}(m) = \alpha s_1^{we}(m) + \beta s_2^{we}(m)$$

$$\begin{aligned} s^{wy}(m) &= \sum_n h_n [\alpha s_1^{we}(m-n) + \beta s_2^{we}(m-n)] \\ &= \alpha \sum_n h_n s_1^{we}(m-n) + \beta \sum_n h_n s_2^{we}(m-n) \end{aligned}$$

$$s^{wy}(m) = \alpha s_1^{wy}(m) + \beta s_2^{wy}(m)$$

Charakterystyki częstotliwościowe

$$s^{wy}(t) = \sum_{n=0}^N h_n s^{we}(t - n\Delta t)$$

$$\hat{s}^{wy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s^{wy}(t) e^{-2\pi j f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^N h_n s^{we}(t - n\Delta t) e^{-2\pi j f t} dt$$

$$= \sum_{n=0}^N h_n \hat{s}^{we}(f) e^{-2\pi j f n \Delta t}$$

$$\underline{f} = f \Delta t = f / f_p$$

$$H(\underline{f}) = \frac{\hat{s}^{wy}(\underline{f})}{\hat{s}^{we}(\underline{f})} = \sum_{n=0}^N h_n e^{-2\pi j \underline{f} n}$$

$$H(\underline{f}) \Rightarrow |H(\underline{f})|$$

$$\theta(\underline{f}) = \arctg \frac{\text{Im}(H(\underline{f}))}{\text{Re}(H(\underline{f}))}$$

$$z = e^{2\pi j \underline{f}}$$

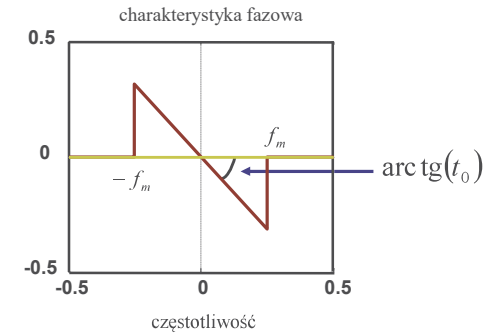
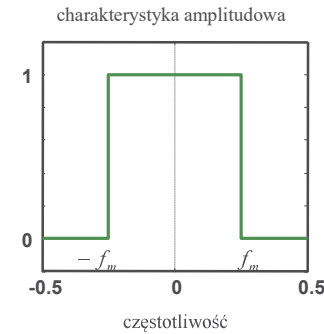
$$H(z) = \sum_{n=0}^N h_n z^{-n}$$

9

Idealny filtr dolnoprzepustowy

$$H(f) = \begin{cases} e^{-2\pi j f t_0} & \text{dla } |f| < f_m \\ 0 & \text{dla } |f| \geq f_m \end{cases}$$

$$\varphi(f) = -2\pi t_0 f$$



10

Filtry FIR z liniową charakterystyką fazową

$$\theta(\underline{f}) = -2\pi \underline{f} \tau$$

$$\text{tg}(\theta(\underline{f})) = \frac{\text{Im}(H(\underline{f}))}{\text{Re}(H(\underline{f}))}$$

$$H(\underline{f}) = \sum_{n=0}^N h_n e^{-2\pi j \underline{f} n} = \sum_{n=0}^N h_n \cos(2\pi \underline{f} n) - j \sum_{n=0}^N h_n \sin(2\pi \underline{f} n)$$

$$\text{tg}(\theta(\underline{f})) = \frac{-\sum_{n=0}^N h_n \sin(2\pi \underline{f} n)}{\sum_{n=0}^N h_n \cos(2\pi \underline{f} n)} \Rightarrow \frac{-\sin(2\pi \underline{f} \tau)}{\cos(2\pi \underline{f} \tau)} = \frac{-\sum_{n=0}^N h_n \sin(2\pi \underline{f} n)}{\sum_{n=0}^N h_n \cos(2\pi \underline{f} n)}$$

$$\forall \underline{f} \in [0, 1/2]$$

11

Filtry FIR z liniową charakterystyką fazową

$$\sum_{n=0}^N h_n [\sin(2\pi \underline{f} \tau) \cos(2\pi \underline{f} n) - \cos(2\pi \underline{f} \tau) \sin(2\pi \underline{f} n)] = 0$$

$$\forall \underline{f} \in [0, 1/2]$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\sum_{n=0}^N h_n \sin(2\pi \underline{f} (\tau - n)) = 0$$

$$\forall \underline{f} \in [0, 1/2]$$

dla

$$h_n = h_{N-n}$$

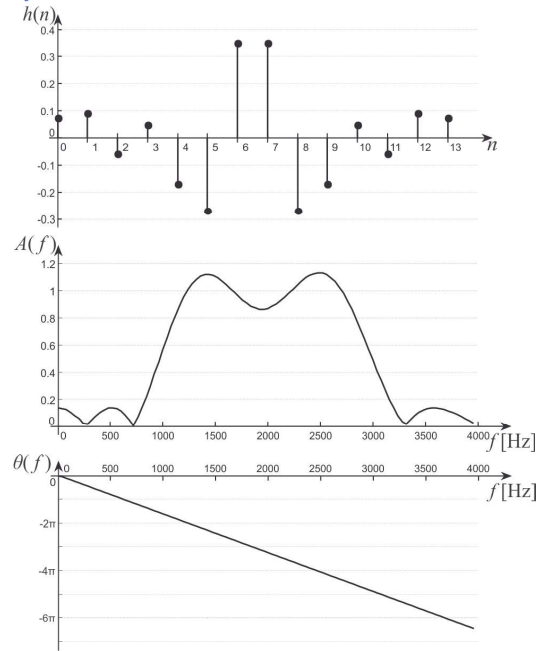
$$\tau = \frac{N}{2}$$

Kąt nachylenia ch-ki fazowej

$$\alpha = -\arctg(2\pi \tau) = -\arctg(\pi N)$$

12

Przykład filtru z liniową charakterystyką fazową



Filtry FIR z afiniczną charakterystyką fazową

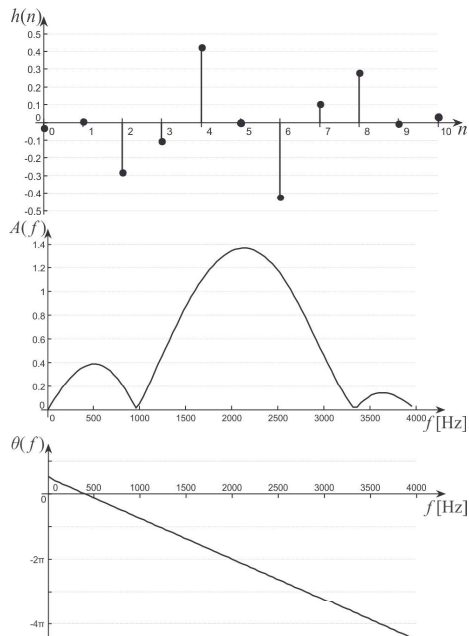
$$\theta(\underline{f}) = -2\pi \underline{f} \tau + \alpha$$

$$\tau = \frac{N}{2}$$

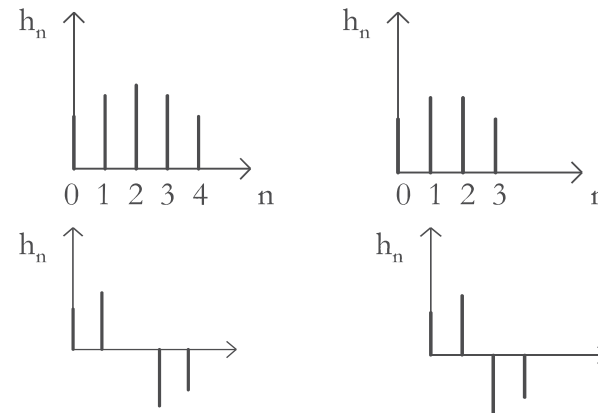
$$\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$h_n = -h_{N-n}$$

Przykład filtru z afiniczną charakterystyką fazową

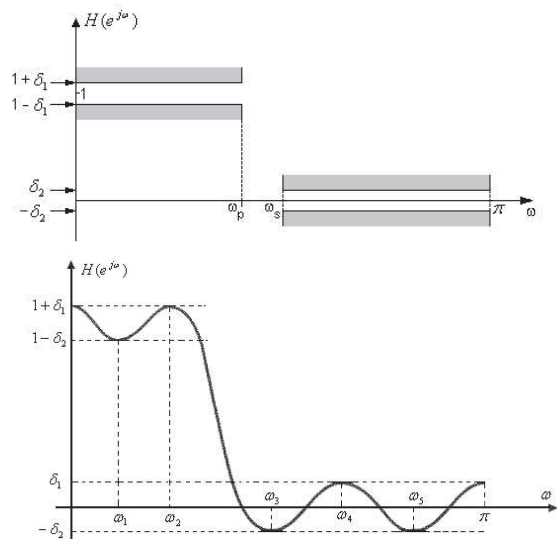


Cztery typy symetrii odpowiedzi impulsowej



- u góry z liniową charakterystyką fazową
- a u dołu z afiniczną charakterystyką,
- z lewej strony dla filtru rzędu parzystego
- a z prawej dla filtru rzędu nieparzystego.

Założenia projektowe w dziedzinie częstotliwości



Kryterium w przestrzeni $C_W(0, 1/2)$

$$E(\underline{f}) = W(\underline{f}) \left(A^{zad}(\underline{f}) - A(\underline{f}) \right)$$

$$Q = \max_{\underline{f}} |E(\underline{f})|$$

PROJEKTOWANIE



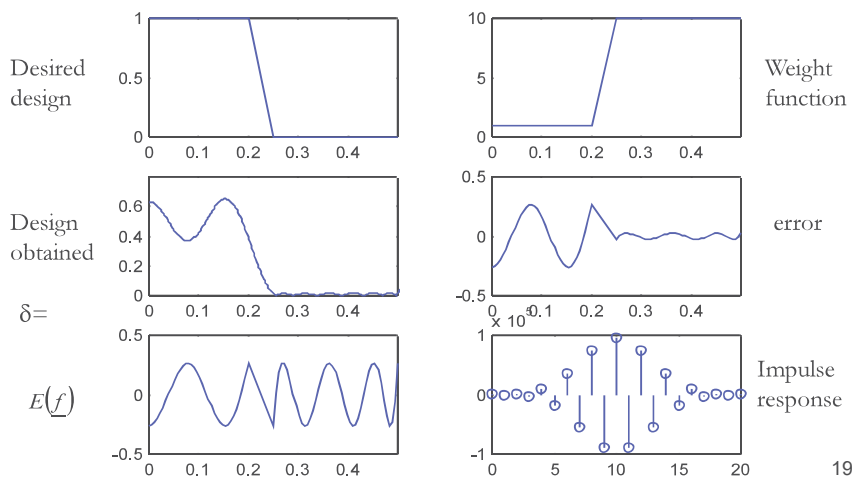
$$Q^{opt} = \min_h \max_{\underline{f}} |E(\underline{f})|$$

Przykład metody Parks-McClellan 1972 rok

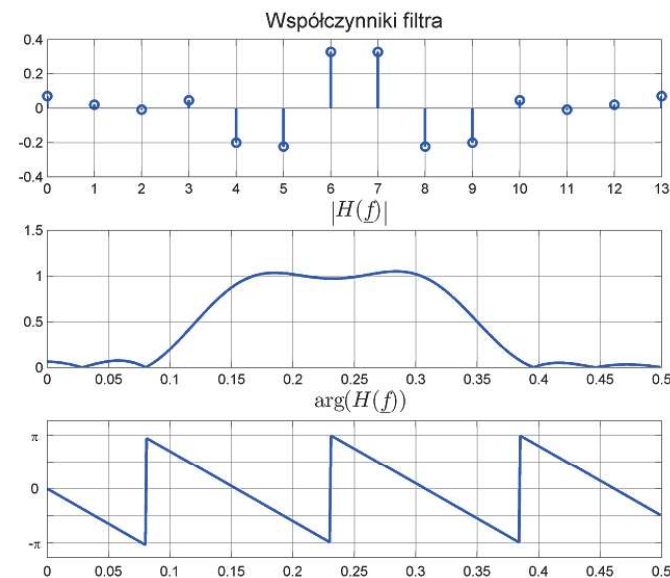
$$E(\underline{f}) = W(\underline{f}) \left(A^{zad}(\underline{f}) - A(\underline{f}) \right)$$

Algorytm Remez 1957 rok

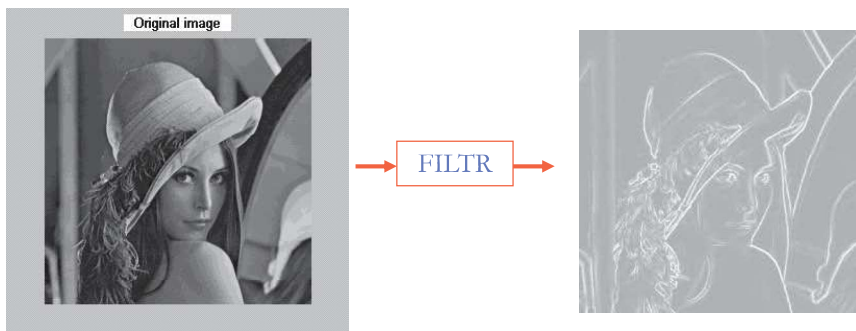
$$Q^{opt} = \min_h \max_{\underline{f}} |E(\underline{f})|$$



Przykład filtra z liniową charakterystyką fazową

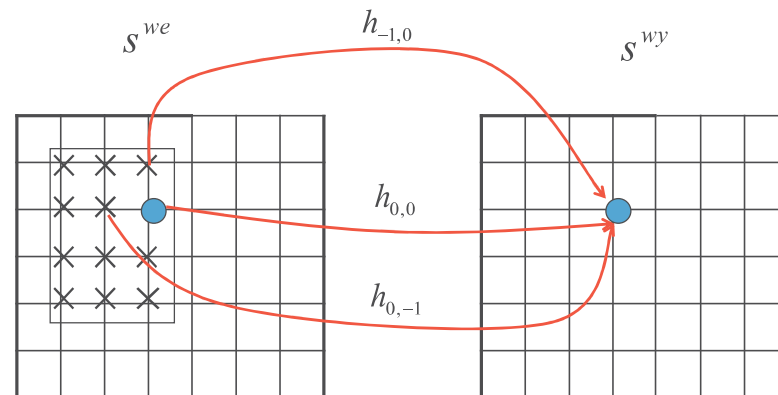


Filtracja 2-D FIR



21

Graficzna prezentacja filtru 2-D FIR



22

Definicja filtru 2-D FIR

$$s^{wy}(k, l) = \sum_m \sum_n h_{m,n} s^{we}(k-m, l-n)$$

$$\bar{s}^{wy}(z_x, z_y) = \sum_k \sum_l s^{wy}(k, l) z_x^{-k} z_y^{-l}$$

$$\bar{s}^{wy}(z_x, z_y) = \sum_{(m,n) \in R_h} \sum_k \sum_l h_{m,n} s^{we}(k-m, l-n) z_x^{-k} z_y^{-l}$$

$$\bar{s}^{wy}(z_x, z_y) = \sum_{(m,n) \in R_h} h_{m,n} z_x^{-m} z_y^{-n} \bar{s}^{we}(z_x, z_y)$$

$$H(z_x, z_y) = \sum_{(m,n) \in M^{we}} h_{m,n} z_x^{-m} z_y^{-n}$$

$$\bar{s}^{wy}(z_x, z_y) = H(z_x, z_y) \bar{s}^{we}(z_x, z_y)$$

23

Charakterystyki częstotliwościowe filtru 2-D FIR

$$H(z_x, z_y) = \sum_{(m,n) \in M^{we}} h_{m,n} z_x^{-m} z_y^{-n}$$

wstawiając

$$z_x = e^{2\pi j f_x} \quad \text{oraz} \quad z_y = e^{2\pi j f_y}$$

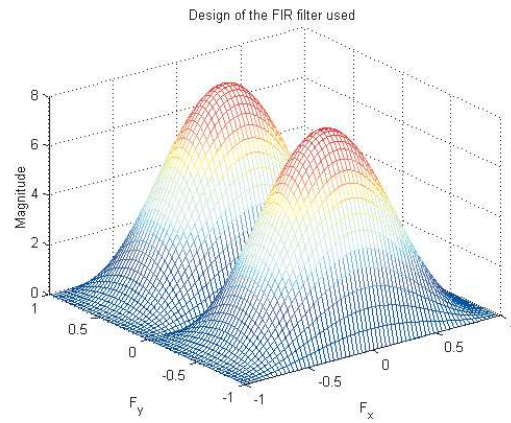
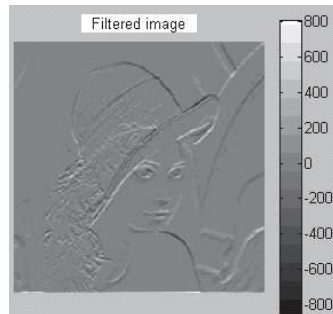
otrzymujemy

$$H(\underline{f}_x, \underline{f}_y) = \sum_{(m,n) \in R_h} h_{m,n} e^{-2\pi j(\underline{f}_x m + \underline{f}_y n)} = A(\underline{f}_x, \underline{f}_y) e^{j\theta(\underline{f}_x, \underline{f}_y)}$$

$$\theta(\underline{f}_x, \underline{f}_y) = \arctg \left(\frac{\text{Im}(H(\underline{f}_x, \underline{f}_y))}{\text{Re}(H(\underline{f}_x, \underline{f}_y))} \right)$$

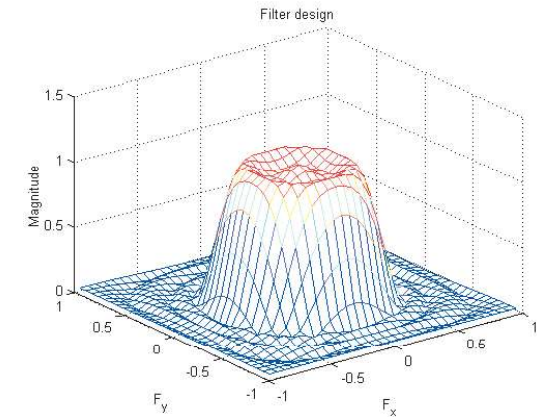
24

Filtr górnoprzepustowy z afiniczną charakterystyką fazową



25

Filtr dolnoprzepustowy z afiniczną charakterystyką fazową



26