

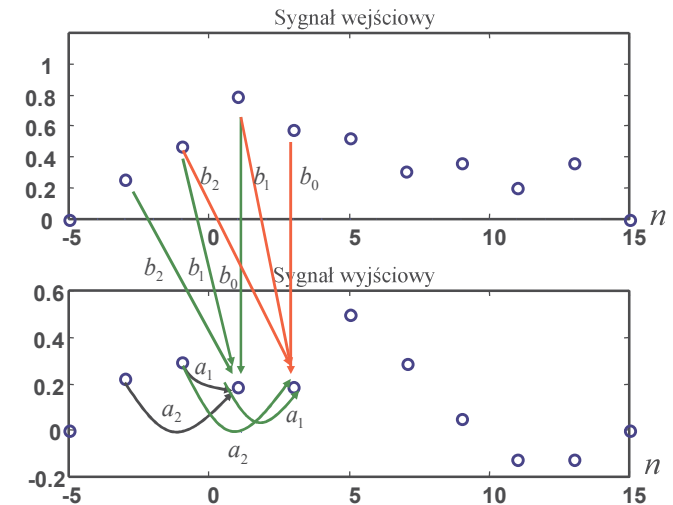
Spis treści

1. Definicja filtru IIR
2. Stabilność filtrów IIR
3. Metody projektowania filtrów IIR
4. Przykład
5. Dwuwymiarowe filtry rekursywne
6. Optymalizacyjna metoda projektowania filtrów 2-D IIR

1

Definicja filtru IIR

$$s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^M b_n s^{we}(m-n) - \sum_{n=1}^N a_n s^{wy}(m-n)$$



2

Transmitancja filtru IIR

$$s^{wy}(m) = \sum_{n=0}^M b_n s^{we}(m-n) - \sum_{n=1}^N a_n s^{wy}(m-n)$$

$$\bar{s}^{wy}(z) = \sum_m s^{wy}(m) z^{-m}$$

$$\bar{s}^{wy}(z) = \sum_n b_n \sum_m s^{we}(m-n) z^{-m} - \sum_n a_n \sum_m s^{wy}(m-n) z^{-m}$$

$$\bar{s}^{wy}(z) = \sum_{n=0}^M b_n \bar{s}^{we}(z) z^{-n} - \sum_{n=1}^N a_n \bar{s}^{wy}(z) z^{-n}$$

$$\bar{s}^{wy}(z) \left[1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n} \right] = \bar{s}^{we}(z) \sum_{n=0}^M b_n z^{-n}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}}$$

$$\bar{s}^{wy}(z) = H(z) \bar{s}^{we}(z)$$

3

Charakterystyki częstotliwościowe filtrów IIR

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}}$$

$$z = e^{2\pi j f \underline{t}}$$

$$\underline{f} = f \Delta t = f / f_p$$

$$H(\underline{f}) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n e^{-2\pi j \underline{f} n}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n e^{-2\pi j \underline{f} n}}$$

$$|H(\underline{f})|$$

$$\theta(\underline{f}) = \arctg \frac{\text{Im}(H(\underline{f}))}{\text{Re}(H(\underline{f}))}$$

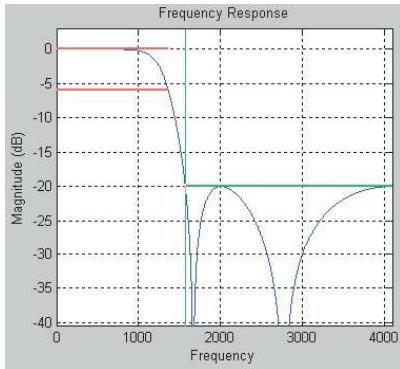
$$H(\underline{f}) = A(\underline{f}) e^{j\theta(\underline{f})}$$

4

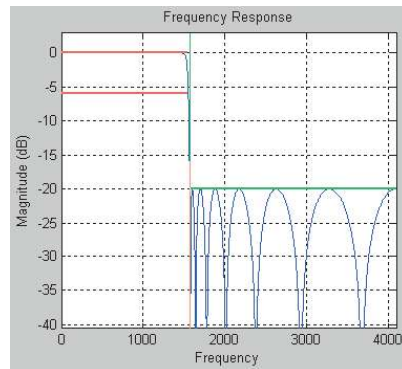
Przykładowe charakterystyki amplitudowe

AGH

Dolnoprzepustowe filtry Czebyszewa - typ I



Rząd 4



Rząd 14

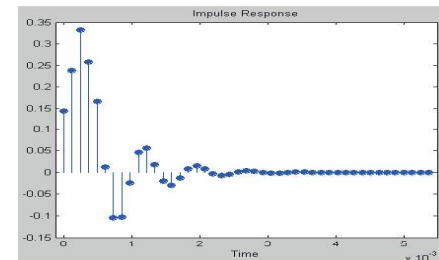
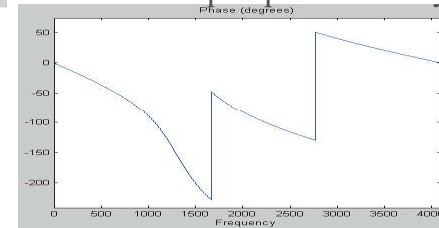
5



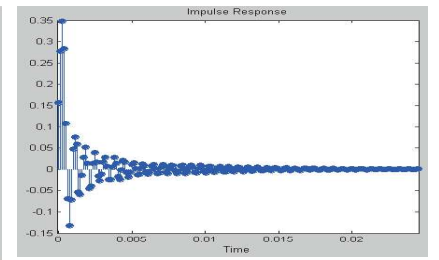
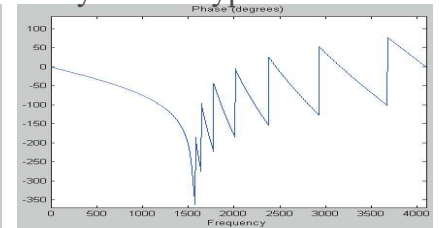
Przykładowe charakterystyki fazowe i odpowiedzi impulsowe

AGH

Dolnoprzepustowe filtry Czebyszewa - typ I



Rząd 4



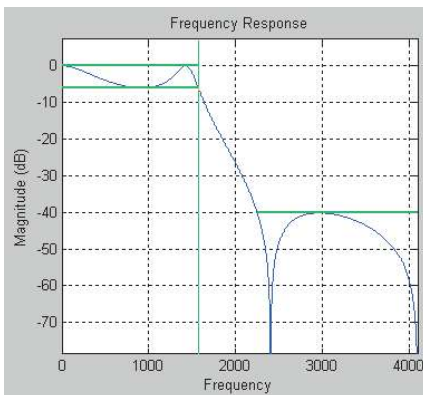
Rząd 14

6

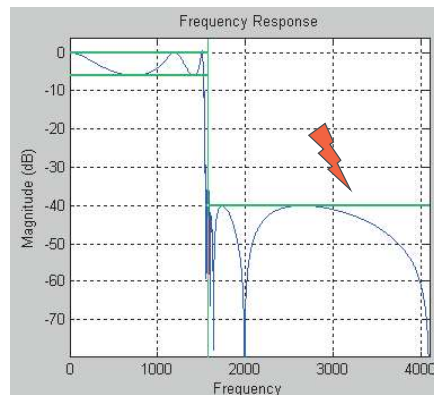
Przykładowe charakterystyki amplitudowe

AGH

Dolnoprzepustowy filtr eliptyczny



Rząd 3



Rząd 21 - niestabilny !!!

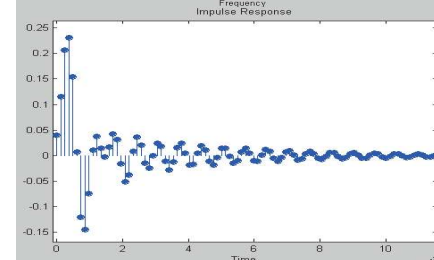
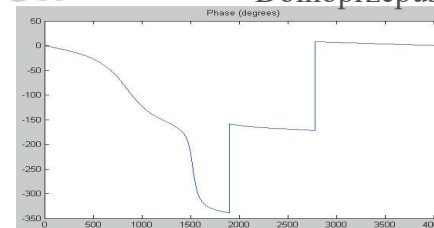
7



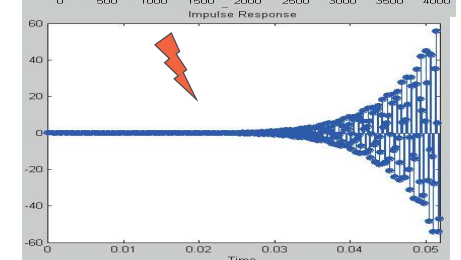
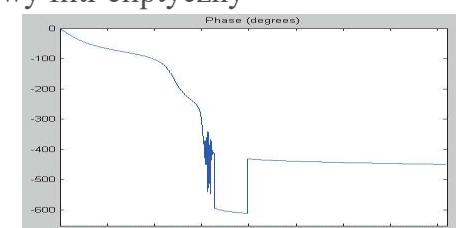
Przykładowe charakterystyki fazowe oraz odpowiedzi impulsowe

AGH

Dolnoprzepustowy filtr eliptyczny



Rząd 3



Rząd 21 - niestabilność !!!⁸

Definicja stabilności filtru IIR

Filtr IIR jest **stabilny** jeżeli istnieją ograniczone stałe

$$c_1 > 0$$

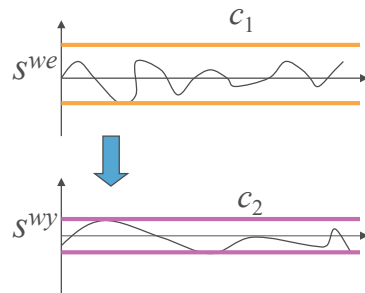
$$c_2 > 0$$

takie, że z warunku

$$\|s^{we}\| \leq c_1$$

wynika

$$\|s^{wy}\| \leq c_2$$



Na ogół przyjmujemy $\|s\| = \max_m |s(m)|$

9

Definicja asymptotycznej stabilności

Filtr IIR jest *asymptotycznie stabilny* jeżeli

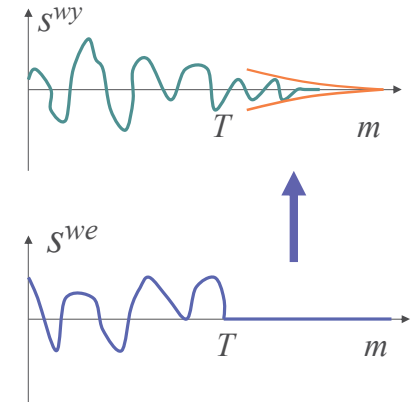
$$\lim_{m \rightarrow \infty} s^{wy}(m) = 0$$

gdy

$$s^{we}(m) = 0$$

dla wszystkich

$$m \geq T.$$



10

Twierdzenie o stabilności filtrów IIR

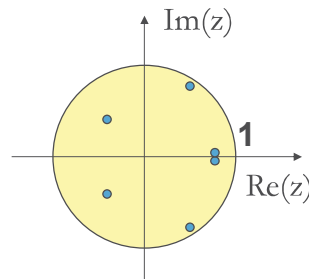
$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}}$$

Filtr IIR jest asymptotycznie stabilny **wtedy i tylko wtedy**,
gdy wszystkie zera wielomianu charakterystycznego

$$P(z) = z^N + \sum_{n=1}^N a_n z^{N-n}$$

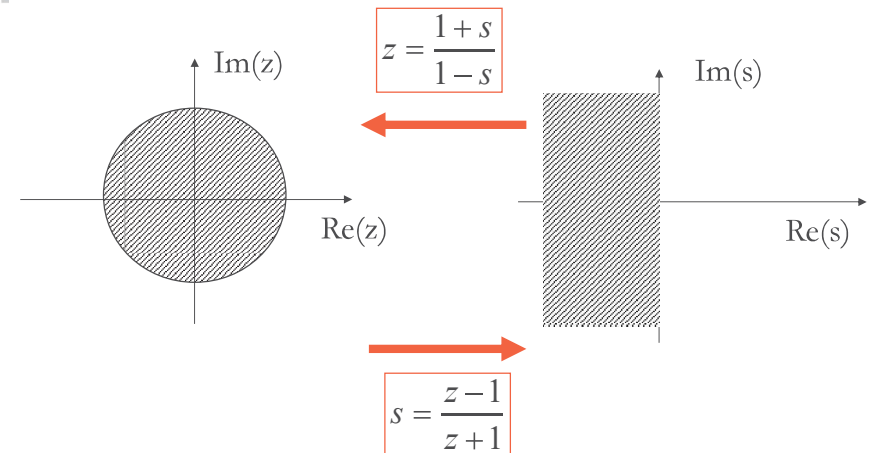
leżą wewnątrz koła jednostkowego, tzn.

$$|z_n| < 1 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots, N.$$



11

Graficzna interpretacja przekształcenia koła jednostkowego w lewą półpłaszczyznę



12

Twierdzenie o przekształceniu warunków stabilności Schura na warunki stabilności Hurwitza

Dla przekształceń

$$z = \frac{1+s}{1-s}$$

$$s = \frac{z-1}{z+1}$$

warunek $|z| < 1$

jest równoważny nierówności $\operatorname{Re}(s) < 0$.

Dowód:

$$|z| = \left| \frac{1+s}{1-s} \right| < 1 \implies \left| \frac{1+s}{1-s} \right| = \frac{|1+s|}{|1-s|} < 1 \implies |1+s| < |1-s|$$

$$\sqrt{(1+\operatorname{Re}(s))^2 + \operatorname{Im}^2(s)} < \sqrt{(1-\operatorname{Re}(s))^2 + \operatorname{Im}^2(s)}$$

$$(1+\operatorname{Re}(s))^2 + \operatorname{Im}^2(s) < (1-\operatorname{Re}(s))^2 + \operatorname{Im}^2(s)$$

$$1 + 2\operatorname{Re}(s) + \operatorname{Re}^2(s) + \operatorname{Im}^2(s) < 1 - 2\operatorname{Re}(s) + \operatorname{Re}^2(s) + \operatorname{Im}^2(s)$$

$$4\operatorname{Re}(s) < 0$$

13

Twierdzenie o wielomianowej stabilności typu Hurwitza

$$P\left(z = \frac{1+s}{1-s}\right) = 0 \implies \sum_{n=0}^N c_n s^n = 0$$

Wszystkie pierwiastki wielomianu

$$P(s) = \sum_{n=0}^N c_n s^n$$

z dodatnimi współczynnikami, tzn.

$$c_n > 0$$

mają ujemne części rzeczywiste **wtedy i tylko wtedy**, gdy wszystkie minory wiodące wyznacznika

verte

14

c.d. twierdzenia

$$\Delta_N = \begin{vmatrix} c_{N-1} & c_N & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{N-3} & c_{N-2} & c_{N-1} & c_N & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{N-5} & c_{N-4} & c_{N-3} & c_{N-2} & c_{N-1} & c_N & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 \end{vmatrix}$$

są większe od zera.

15

Trzy pierwsze minory wiodące

$$\Delta_1 = c_{N-1} > 0$$

$$\Delta_2 = c_{N-1}c_{N-2} - c_Nc_{N-3} > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{N-1} & c_N & 0 \\ c_{N-3} & c_{N-2} & c_{N-1} \\ c_{N-5} & c_{N-4} & c_{N-3} \end{vmatrix} > 0$$

16

Projektowanie filtrów IIR w oparciu o filtry analogowe

$$H(s) = \frac{\sum_{m=0}^M \alpha_m s^m}{\sum_{m=0}^N \beta_m s^m}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}}$$

$$s = \frac{z-1}{z+1}$$

$$z = e^{2\pi j f \Delta t}$$

$$f = f \Delta t$$

$$2\pi j f = \frac{e^{2\pi j f \Delta t} - 1}{e^{2\pi j f \Delta t} + 1}$$

17

Powtórka z trygonometrii



$$e^{2\pi j f \Delta t} = \cos(2\pi f \Delta t) + j \sin(2\pi f \Delta t)$$

$$1 - \cos(2\pi f \Delta t) = 2 \sin^2(\pi f \Delta t)$$

$$1 + \cos(2\pi f \Delta t) = 2 \cos^2(\pi f \Delta t)$$

$$\sin(2\pi f \Delta t) = 2 \sin(\pi f \Delta t) \cos(\pi f \Delta t)$$

18

Zależność pomiędzy argumentami charakterystyk filtrów analogowych i cyfrowych

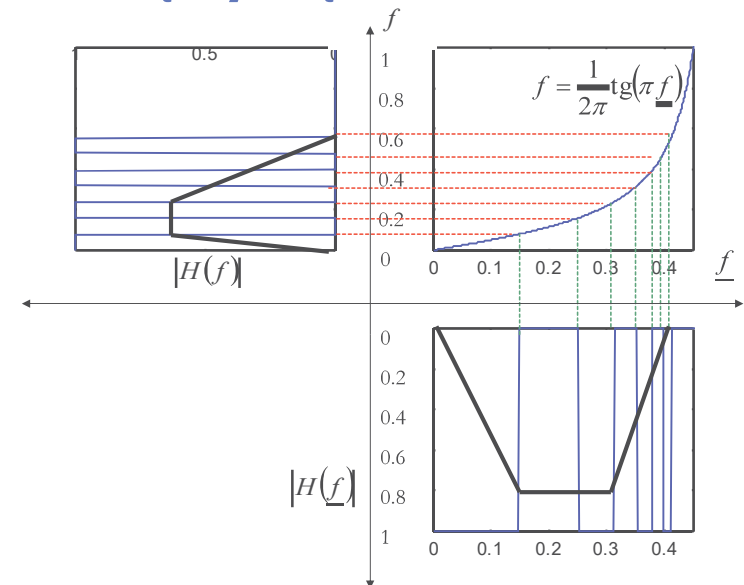
$$2\pi j f = \frac{\cos(2\pi f \Delta t) + j \sin(2\pi f \Delta t) - 1}{\cos(2\pi f \Delta t) + j \sin(2\pi f \Delta t) + 1} = \frac{-2 \sin^2(\pi f \Delta t) + 2j \sin(\pi f \Delta t) \cos(\pi f \Delta t)}{2 \cos^2(\pi f \Delta t) + 2j \sin(\pi f \Delta t) \cos(\pi f \Delta t)}$$

$$\frac{\sin(\pi f \Delta t) [j \cos(\pi f \Delta t) - \sin(\pi f \Delta t)]}{\cos(\pi f \Delta t) [\cos(\pi f \Delta t) + j \sin(\pi f \Delta t)]} = j \operatorname{tg}(\pi f \Delta t)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg}(\pi f \Delta t)$$

19

Graficzna prezentacja zależności między częstotliwościami



20

Algorytm projektowania

1. Przyjąć założenia projektowe

$$H(\underline{f}) = A(\underline{f})e^{j\theta(\underline{f})}$$

2. Zmodyfikować założenia projektowe posługując się

zależnością $\underline{f} = \frac{1}{\pi} \arctg(2\pi f)$

3. Zaprojektować filtr analogowy

$$H(s) = \frac{\sum_{n=0}^M \alpha_n s^n}{\sum_{n=0}^N \beta_n s^n}$$

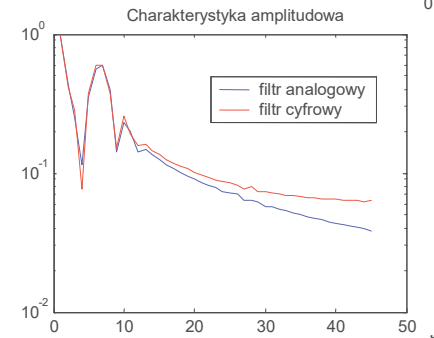
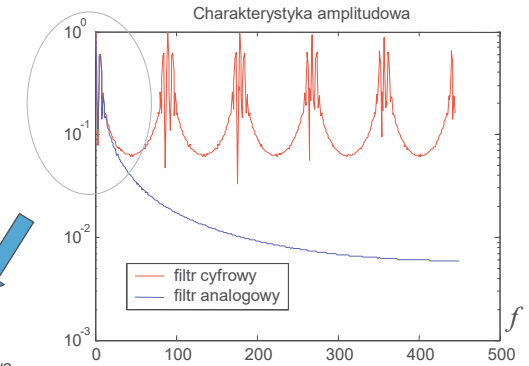
4. W oparciu o powyższy filtr,

wyliczyć z -transmitancję
$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^M \alpha_n (z-1)^n (z+1)^{N-n}}{\sum_{n=0}^N \beta_n (z-1)^n (z+1)^{N-n}}$$

posługując się podstawieniem

$$s = \frac{z-1}{z+1}$$

Przykład



Charakterystyka amplitudowa otrzymanego filtru cyfrowego jest okresowa i różni się od charakterystyki filtru analogowego.

Optymalizacyjne metody projektowania filtrów

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n z^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}}$$

Podstawiając $z = e^{2\pi j f}$ otrzymujemy

$$H(\underline{f}) = \frac{\sum_{n=0}^M b_n e^{-2\pi n j \underline{f}}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n e^{-2\pi n j \underline{f}}}$$

Kryterium oceniające jakość filtru może być w postaci

$$Q = \int_0^{0.5} |H(\underline{f}) - A(\underline{f})e^{j\theta(\underline{f})}|^2 d\underline{f}$$

Kolejne kryteria



$$Q = \int_0^{0.5} [|H(\underline{f})| - |A(\underline{f})|]^2 d\underline{f}$$

$$Q = \alpha \int_0^{0.5} w_1(\underline{f}) |H(\underline{f}) - A(\underline{f})e^{j\theta(\underline{f})}|^2 d\underline{f} + (1-\alpha) \int_0^{0.5} w_2(\underline{f}) [|H(\underline{f})| - |A(\underline{f})|]^2 d\underline{f}$$

gdzie

$$\alpha \in [0 \ 1]$$

Przykład

Minimalizując powyższe kryterium zaprojektować filtr 3-go rzędu dolnoprzepustowy z częstotliwością odcięcia 3 kHz i liniową charakterystyką fazową

$$\theta(f) = -2\pi f \underline{t}$$

gdzie

$$\Delta t = 0.0001 \text{ sek}$$

jest zadana gęstością próbkowania sygnału.

Częstotliwość Nyquista

(tzn. połowa częstotliwości próbkowania)

$$f_{\max} = 5\text{kHz}$$

25

c.d przykładu

Zgodnie z tematem zadania projektowany filtr ma postać

$$s^{wy}(n) = b_0 s^{we}(n) + b_1 s^{we}(n-1) + b_2 s^{we}(n-2) + b_3 s^{we}(n-3) - a_1 s^{wy}(n-1) - a_2 s^{wy}(n-2) - a_3 s^{wy}(n-3)$$

26

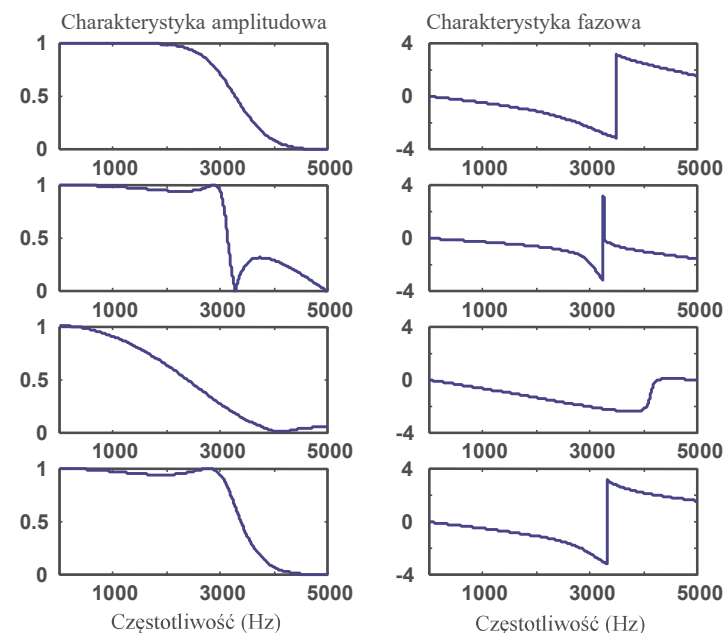
Rozwiązania przykładu

Tab.1 Parametry filtra cyfrowego IIR

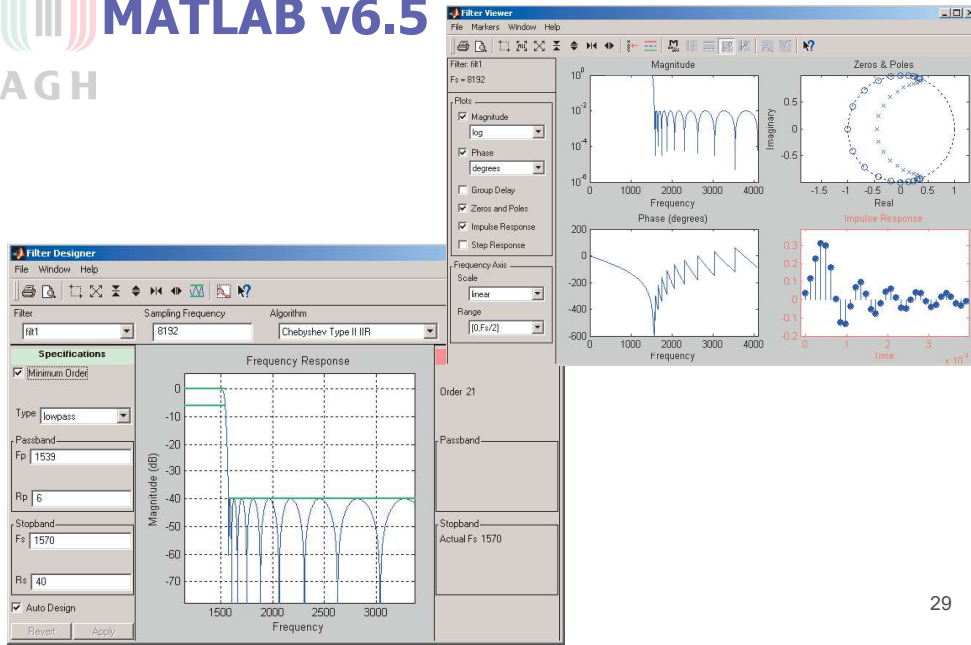
	Butterwortha	Eliptyczny	Metoda optymalizacyjna	Czebyszewa
b_0	0.2569	0.3651	0.2574	0.2489
b_1	0.7707	0.8405	0.4208	0.7466
b_2	0.7707	0.8405	0.2349	0.7466
b_3	0.2569	0.3651	-0.0029	0.2489
a_1	0.5772	0.6676	-0.1735	0.5043
a_2	0.4218	0.7141	0.0962	0.5289
a_3	0.0563	0.0296	-0.0236	-0.0423

27

Graficzna prezentacja rozwiązań



28



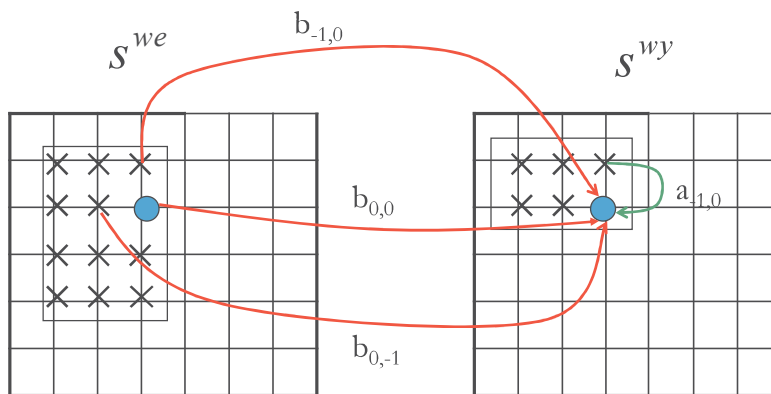
29

Filtracja 2-D IIR



30

Graficzna prezentacja filtru 2-D IIR



Kierunek obliczeń



31

Dwuwymiarowe filtry z nieskończoną odpowiedzią impulsową

$$s^{wy}(k,l) = \sum_{(m,n) \in R^{wy}} b_{m,n} s^{we}(k-m, l-n) - \sum_{(m,n) \in R^{wy}} a_{m,n} s^{wy}(k-m, l-n)$$

$$H(z_x, z_y) = \frac{\sum_{(m,n) \in R^{wy}} b_{m,n} z_x^{-m} z_y^{-n}}{1 + \sum_{(m,n) \in R^{wy}} a_{m,n} z_x^{-m} z_y^{-n}}$$

$$z_x = e^{2\pi j f_x}$$

$$z_y = e^{2\pi j f_y}$$

32

Normalizacja częstotliwości

Gęstość próbkowania

$$\Delta x = X / (M - 1)$$

$$\Delta y = Y / (N - 1)$$

Wniosek z twierdzenia o próbkowaniu

$$f_x^{\max} = 0,5 / \Delta x$$

$$f_y^{\max} = 0,5 / \Delta y$$

Normowanie częstotliwości

$$\underline{f}_x = f_x \Delta x$$

$$\underline{f}_y = f_y \Delta y$$

Przykład projektowania filtru

$$s^{wy}(k, l) = \sum_{(m, n) \in R^{we}} a_{m, n} s^{we}(k - m, l - n) - \sum_{(m, n) \in R^{wy}} b_{m, n} s^{wy}(k - m, l - n)$$

$$H(\underline{f}_x, \underline{f}_y) = \frac{\sum_{(m, n) \in R^{we}} a_{m, n} e^{-j(m\underline{f}_x + n\underline{f}_y)}}{1 + \sum_{(m, n) \in R^{wy}} b_{m, n} e^{-j(m\underline{f}_x + n\underline{f}_y)}}$$

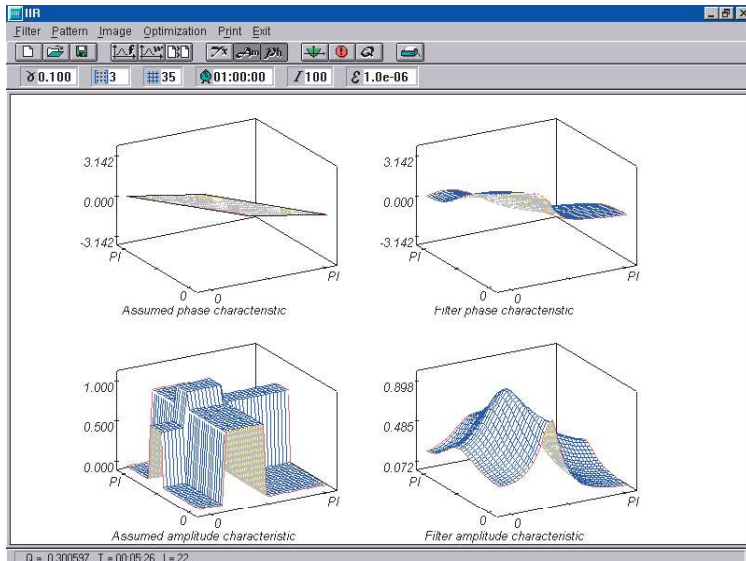
$$Q = (1 - \gamma)Q_{amp} + \gamma Q_{ph}$$

$$Q_{amp} = \int_0^{0,5} \int_0^{0,5} \left(|H(\underline{f}_x, \underline{f}_y)| - A(\underline{f}_x, \underline{f}_y) \right)^2 d\underline{f}_y d\underline{f}_x$$

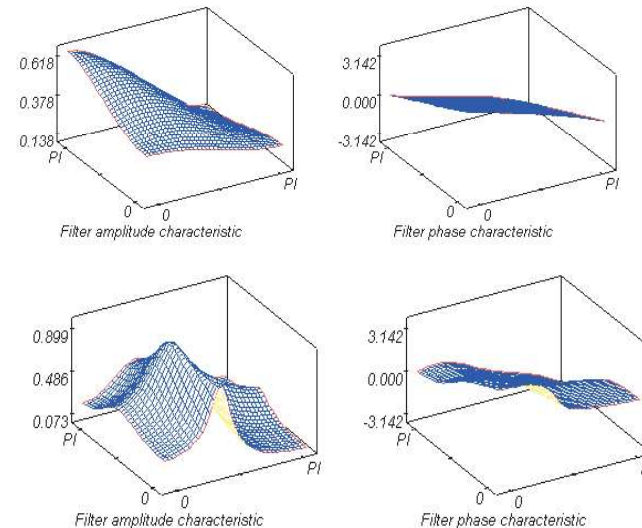
$$Q_{ph} = \int_0^{0,5} \int_0^{0,5} \left| H(\underline{f}_x, \underline{f}_y) - A(\underline{f}_x, \underline{f}_y) e^{j\theta(\underline{f}_x, \underline{f}_y)} \right|^2 d\underline{f}_y d\underline{f}_x$$

$$\theta(\underline{f}_x, \underline{f}_y) = \pi - \underline{f}_x - \underline{f}_y \quad \text{gdzie } \gamma \in [0 \ 1]$$

Projektowanie filtrów 2D IIR w środowisku Windows



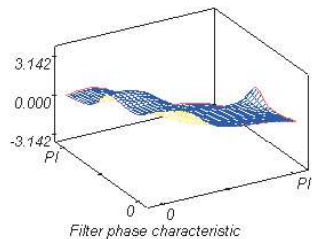
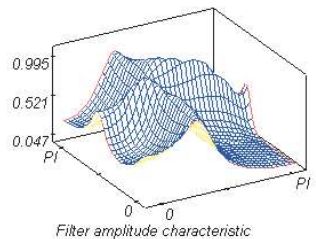
Efekty projektowania w zależności od rzędu filtru



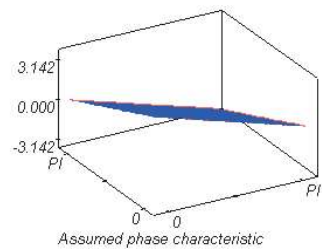
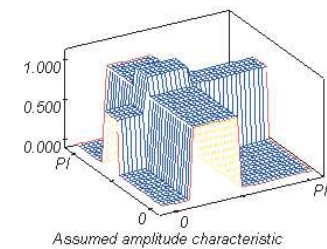
Tylko 4+3=7 współczynników było do wyznaczenia

Do wyznaczenia było 9+8=17 współczynników

Efekty projektowania w zależności od rzędu filtru



Aż $16+15=31$ współczynników było do wyznaczenia



Założenia projektowe



Zależność między rzędem filtru a jego jakością i czasem projektowania

