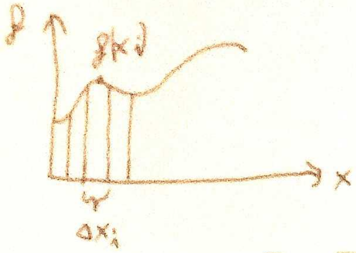
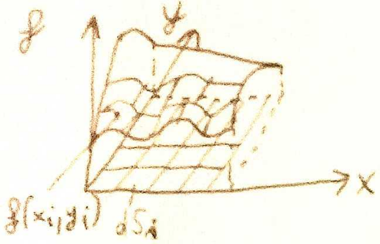
Całki



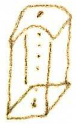
$$\int f = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i \underbrace{f(x_i)\Delta x_i}_{dS}$$

dS, całka = powierzchnia



$$\int f\,dx\,dy = \underbrace{\sum f(x,y)\cdot dS}$$

(granica dla podziału dostatnego nieskończenie)

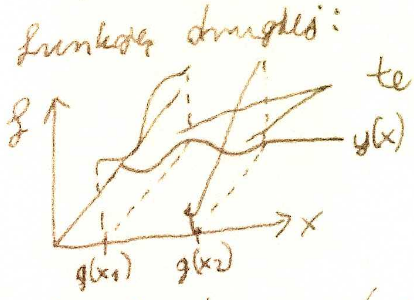


$\approx S\cdot h = V$

[redacted]

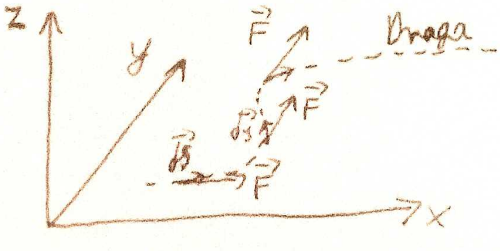
$$\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\Big(\underbrace{\int f(x,y)\,dx}_{=g(y)}\Big)dy = \int\Big(\underbrace{\int f(x,y)\,dy}_{=g(x)}\Big)dx$$

Najpierw całkujemy wzdłuż jednej zmiennej. Otrzymujemy funkcję drugiej:



te powierzchnie to $\int_{y=0}^{y=y(x)} f(x,y)\,dy$. Po całkowaniu zostaje nam $[f_2(x)]_0^{y(x)}$ — funkcja x.

Tą funkcję znów całkujemy, po 'x'.



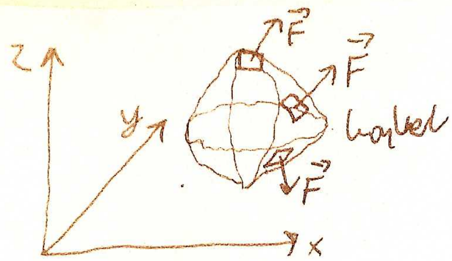
$\vec F \circ d\vec s = dW \quad / \int$

$\int \vec F \circ d\vec s = \int dW = W$

//

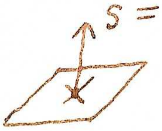
$\int (F_x\,dx + F_y\,dy) = \int F_x\,dx + \int F_y\,dy$

$\int = \int_{\Gamma \text{ - krzywa, tor}}$ — całka krzywoliniowa

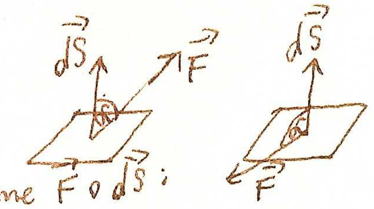


$$\int \vec{F} \circ d\vec{S} = \sum \vec{F} \circ d\vec{S}$$

$\vec{S} = \vec{n} \cdot S$ – powierzchnia (wartość $\vec{S}$)



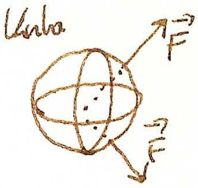
wersor normalny $|\vec{n}| = 1$



Różne $F \circ d\vec{S}$:

Całka powierzchniowa

Jej zdefiniowanie to problem. Prosty przypadek:



$$\int_{S_{kuli}} \vec{F} \circ d\vec{S} = \int F\, dS \cos 90° = F \int dS = F \cdot S = F \cdot 4\pi R^2$$

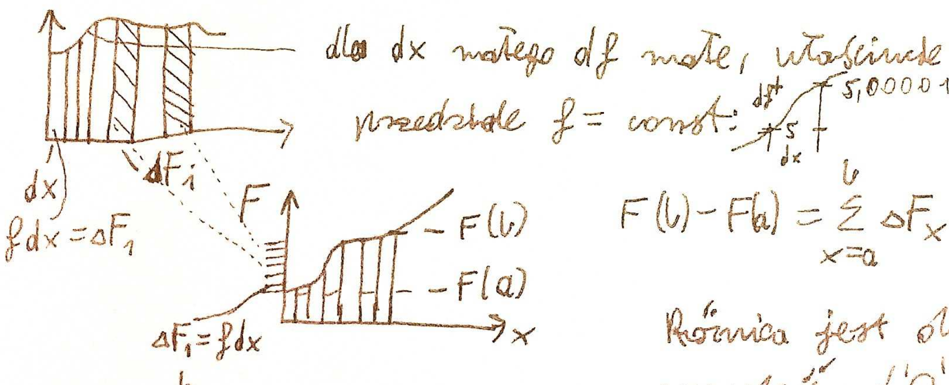
$\vec{F} \perp d\vec{S}$

$|\vec{F}| = const$ na kuli

Czemu $\int$ jest sumą

$$\int = \sum f \cdot dx = \left\{ F' = f,\ \frac{dF}{dx} = f,\ dF = f\,dx \right\} = \sum dF$$ – suma różnic = różnica całkowita F

dla dx małego df małe, właściwie w całym przedziale $f = const$:



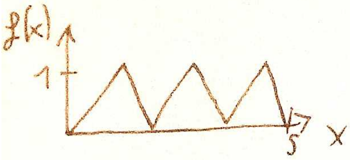
$$F(b) - F(a) = \sum_{x=a}^{b} \Delta F_x = \sum f\,dx = \int_a^b f\,dx$$

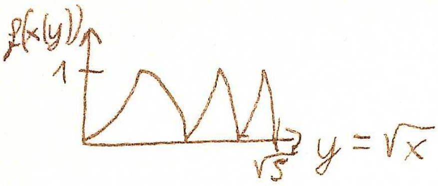
Różnica jest określona, ale wysokość od '0' nie.

A więc $\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a)$

Brak oznaczeń to $\int f\,dx = F(x)$, ale wysokość nad '0' nie jest określona: $\int f\,dx = F + C \Rightarrow (F + C)' = f$.

Zamiana zmiennych: $f(x)\ x \to y = \sqrt{x}$





Jak widać raczej pola $\int_0^5 f(x)\,dx \neq \int_0^{\sqrt{5}} f(y)\,dy$

$S_1 \neq S_2$

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^5 f(x(y)) \cdot \frac{dy}{dy} \cdot dx = \int_0^{\sqrt{5}} g(y) \cdot \underbrace{\frac{dx}{dy}}_{\text{funkcja } y} dy$$

Pochodna $\frac{dx}{dy}$ zapewnia przełożenie dx (wielkości przedziałów) na dy. Tu $\underbrace{\frac{dx}{dy}\cdot dy}_{\text{przedziały}} = \frac{d(y^2)}{dy}\,dy = 2y\,dy$ – 'większe' niż dx.

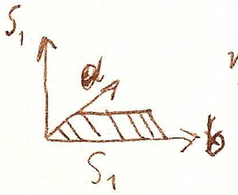
Częsty zapis:

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} y = \sqrt{x} \quad / \text{ różniczkowanie stron} \\ \left.\begin{array}{l} dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \\ dy = \frac{1}{2y}\,dx \end{array}\right\} \text{związek } dx \text{ i } dy \end{array} \right\} = \int_0^{\sqrt{5}} f(x(y))\, 2y\,dy$$

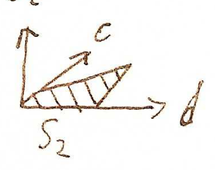
Inne granice, te same wartości f (ale w innych miejscach), inne wielkości przedziałów.

Dla $f(a,b): (a,b) \to (c,d)$

$$\iint f(a,b)\,da\,db = \iint f(a(c,d), b(c,d)) \cdot J \cdot dc\,dd$$



np. $\to$



J – wyznacznik macierzy Jakobiego:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial c} & \frac{\partial a}{\partial d} \\ \frac{\partial b}{\partial c} & \frac{\partial b}{\partial d} \end{vmatrix}}_{\text{funkcje } c \text{ i } d.}$$

Przykład – a dla stałej i zmiennej siły.

$F = const$, $a = const$:

$v = \int a\,dt = at + C$, dla $t=0$ $v=v_0 \Rightarrow v_0 = a\cdot 0 + C$, $C = v_0$

lub

$v = \int_{t_0}^{t} a\,dt = [at]_{t_0}^{t} = at - at_0 = a\cdot\Delta t$ – tu brakuje v_0, musi być $\int_{t_0}^{t} a\,dt = \Delta v$.

(at_0 – też stała)

Dalej:

$$x = \int v\,dt = \int (at + v_0)\,dt = \frac{at^2}{2} + v_0 t + C$$

Dla $t=0$ $x = x_0 \Rightarrow x_0 = 0 + 0 + C$, $C = x_0$.

Dwie stałe ustalają warunki początkowe: $v(t=0) = v_0$, $x(t=t_0) = x_0$

$$F = F(t) = const\cdot t, \quad a = \frac{F}{m} = const\cdot t = A\cdot t$$

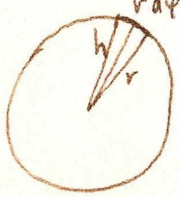
$$v = \int A\cdot t\,dt = \frac{At^2}{2} + C^{=v_0}$$

$$x = \int v\,dt = \int\left(\frac{At^2}{2} + v_0\right)dt = \frac{At^3}{6} + v_0 t + C^{=x_0}$$

Dla siły $F = k\cdot t$ x rośnie z t^3 $(+v_0\cdot t)$

Pole koła:

$$\int_0^{2\pi} r\,d\varphi = r\cdot 2\pi \text{ – długość okręgu } (\Sigma dL = \Sigma r\,d\varphi)$$



$h \approx r$

podstawa$_\Delta \approx r\,d\varphi$

$$S = \Sigma S_\Delta = \Sigma \frac{r\cdot r\,d\varphi}{2}$$

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\,d\varphi = \frac{r^2}{2}\cdot 2\pi = \pi r^2$$

grubość $\Delta S = dr$

$$\Delta S = \pi(r+dr)^2 - \pi r^2 =$$

$$= \pi(\cancel{r^2} + 2r\,dr + \cancel{dr^2} - \cancel{r^2}) =$$

(dr^2 – małe)

$$\approx 2\pi r\cdot dr$$

$$S = \Sigma \Delta S = \int_{r=0}^{r=R} 2\pi r\,dr = 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R =$$

$$= \pi R^2$$