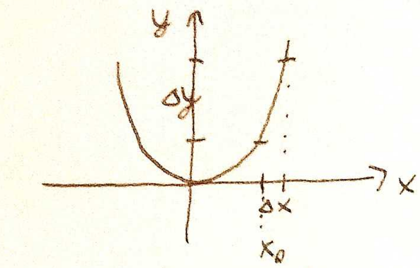
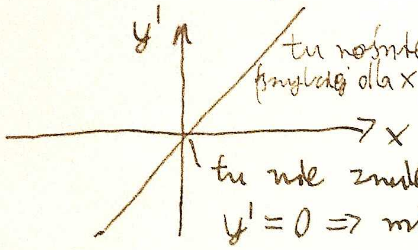
Pochodne:

$$f(x) = x^2 = y$$

$$f' = f'|_{x_0} = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} =$$





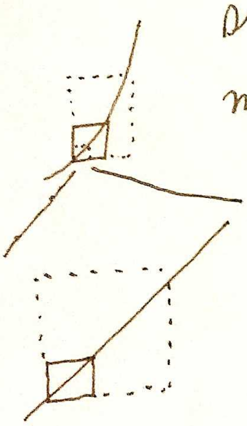
tu rośnie (szybciej dla x większych) = funkcja x

tu nie zmienia się

$y' = 0 \Rightarrow$ min or max

tu maleje, szybciej dla x mniejszych.

$$f'' = (f')' = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$



Dla różnych Δx $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ jest różne. Ale dla $\Delta x \to dx$ nie, $\frac{dy}{dx}$ jest jak stałe.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ właściwie stałe. Funkcje w ogromnym przybliżeniu są jak linie proste o nachyleniu $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha$ $(y = \operatorname{tg}\alpha \, x + b)$.

W 1. przybliżeniu $\Delta y \approx \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x$

W II. przybliżeniu: $\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{\Delta x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots$
(dokładniejszym)

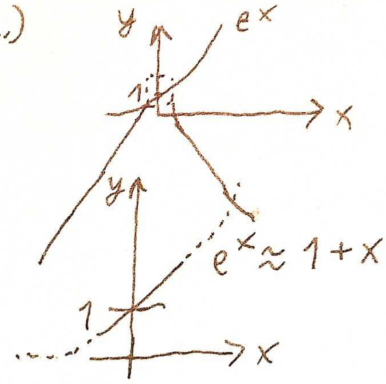
To jest szereg Taylora:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \underset{\text{dokładnie}}{=} f'(x_0)\cdot\frac{\Delta x}{1} + f''(x_0)\cdot\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2} + f'''(x_0)\frac{\Delta x^3}{1\cdot 2\cdot 3}$$

np. $e^x(0+\Delta x) - e^x(0) = e^{\Delta x} - 1 = e^x(0)\cdot\Delta x + e^x(0) + \frac{\Delta x^2}{2} + \dots \approx \Delta x + \frac{\Delta x^2}{2}$

Dla Δx małego Δx^2 i $\Delta x^3 \to 0$.

Zostaje $e^{0+\Delta x} \approx 1 + \Delta x \; (+ \frac{\Delta x^2}{2} + \ldots)$



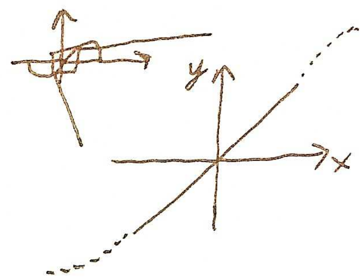
Ze względu na $\Delta x^n << \Delta x^1$ można zawsze odrzucić wyrazy z potęgami 'n' (n-tego rzędu) dla 'n' > 2.

2. prz.) $\sin(0+\Delta x) = \sin(0) + \cos(0)\cdot\Delta x + \cancel{(-\sin 0)\cdot\frac{\Delta x^2}{2}} + \ldots$

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot\frac{\Delta x}{1} + f''(x_0)\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2} + \ldots$$

Zostaje $\sin(\Delta x) \approx 0 + 1\cdot\Delta x \Rightarrow \sin x \approx x$.

(dla Δx małego i od $x_0 = 0$)



Funkcje złożone:

$$f(y) = ay^2 + by + c = a(y-w)^2 + q$$

$f_1^*(y) = y - w$, $f_2(y) = y^2$, $f_3(y) = ay$, $f_4(y) = y + q$

Max. 4 funkcje. Złożenie $f_4(f_3(f_2(f_1(h)))) =$

$$= a(h-w)^2 + q$$

$$f' = f_1'\cdot f_2'\cdot f_3'\cdot f_4' = 1\cdot 2y\cdot a\cdot 1 = 2ay$$

Funkcje wielu zmiennych:

$$f = f(x,y,z) = (\sin x + y^2)^{\ln z}$$

Pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ są obliczane jak gdyby reszta zmiennych (x i z dla $\frac{\partial f}{\partial y}$) była stałymi.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y \text{ dla } f = (A + y^2)^B.$$

$$f'_y = 2y \cdot B(A+y^2)^{B-1} = 2y \cdot \ln z (\sin x + y^2)^{\ln z - 1}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ to funkcja x, y i z $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = g(x, y, z)$

g bo inna postać niż f.

Gdybyśmy znali zależności $x(t), y(t), z(t)$ to

$f(x(t), y(t), z(t)) = h(t)$, np. $(\sin 2t + (\sqrt{t})^2)^{\ln(\sin t)} = h(t)$

Różniczka i pochodna zupełna:

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \text{różniczka } ('=0')$$

Zmiana (różniczka) = jak f zmienia się gdy zmieniamy

tylko 'x'. zmiana x + ... $\left(\frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz\right)$

Pochodna zupełna:

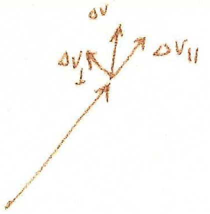
$$\underbrace{\frac{df}{dx}}_{\text{cząstkowa}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\text{zupełna}} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x} \neq \frac{df}{dx}$$

Trzeba znać y i z jako funkcje tylko x, aby policzyć $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{dh}{dt}$$

Polecam policzyć lewą i prawą stronę i sprawdzić.

Pochodne wektorów:



$\Delta V_\perp$ - zmiana kierunku

$\Delta V_{\parallel}$ - zmiana wartości (dł.)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right)$$

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \Delta\vec{v}_{\parallel}, \quad \Delta\vec{v}_\perp = \vec{v} - \Delta\vec{v}_{\parallel}$$

'Δ' - zmiany duże: 

$|v_2| > |v_1|$, ale w granicy nie.

Gradient, dywergencja, rotacja:

∇ - operator nabla $= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

Gradient mamy dla f skalarnej: $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

Dywergencję i rotację dla pól wektorowych:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla \circ \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \circ (F_x, F_y, F_z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Skalar, mówi jak zmienia się $\vec{F}$ dla dodatniej zmiany dx, dy i dz; $F = (x, 0, 0)$, $\operatorname{div} F = 1$, F rośnie liniowo z x

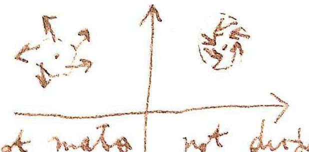
$F = (x^2, 0, 0)$, $\operatorname{div} F = 2x$, F rośnie coraz szybciej z x.

$\operatorname{div} \neq 0$ oznacza, że pola jest coraz więcej (lub mniej), czyli mamy źródło pola (np. ładunki).

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$\neq 0$ oznacza, że pole zakręca.

Dalej wektor:



rot mała | rot duża

lekko skręca | mocno skręca

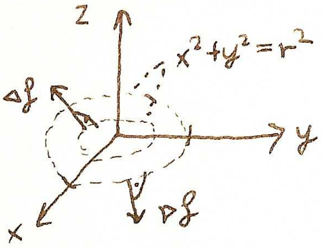
dlatego jest silne i skręca

grad $f = \nabla f$ – wektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$, równoległy do największego wzrostu.

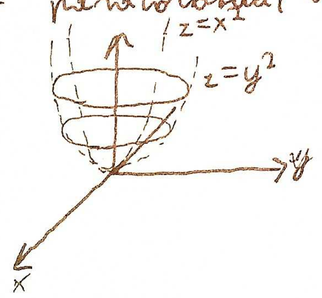
1) $f(x,y) = z$

$f = x^2 + y^2$

$\nabla f = (2x, 2y)$



– paraboloida, tulipan



Tu f rośnie wzdłuż $\vec{r} = (x,y)$ (wzrost max)

a wzdłuż okręgów ($|\vec{r}| = $ const) nie zmienia się.

2) $f(x,y,z) = \frac{1}{r} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$ – potencjał typu $\frac{1}{r}$, np. grawitacyjny.

$$\nabla f = \left(\frac{-2x}{2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-2y}{2r^3}, \frac{-2z}{2r^3}\right) = -\frac{1}{r^3}(x,y,z) = -\frac{\vec{r}}{r^3} = \underbrace{-\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}}_{\text{siła } \vec{G}}$$

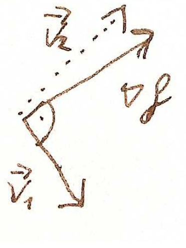
Ogólnie $\nabla E_{pot} = \vec{F}$

Pochodna kierunkowa:

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$ – jak zmienia się f wzdłuż $\vec{v}$.

∇f – max zmiana wzdłuż kierunku max zmiany.

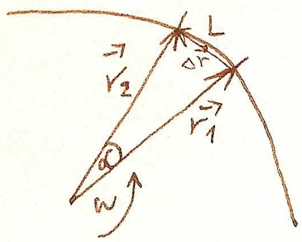
$\frac{\nabla f \circ \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$ – duża, jeśli $\vec{v}$ pod małym kątem do gradientu



wzdłuż $\vec{v}_2$ duża zmiana

wzdłuż $\vec{v}_1$ nie ma zmiany

Przykład - ruch po okręgu:

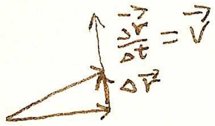


$$L = |\vec{r}|\, d\varphi \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\frac{dL}{dt} = |\vec{r}| \cdot \frac{d\varphi}{dt} = |\vec{r}| \cdot \omega = |\vec{v}| \,, \quad r\omega = v$$

$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \Rightarrow$ praktycznie $\perp \vec{r}$

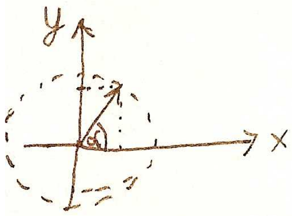
$\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} : \perp \vec{r}$, Δr małe, ale Δt też - iloraz $\dfrac{\Delta r}{\Delta t}$ [illegible]



Radialnie

do wnętrza okręgu

$$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \to \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} : \perp \vec{v}$$



$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\alpha \cdot r \\ y &= \sin\alpha \cdot r \\ \alpha &= \omega t \end{aligned}\right\}$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{1}$$

tu może być $+\alpha_0 \Rightarrow$ faza początkowa

$$v = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (-\omega \cdot \sin(\omega t) \cdot r, \ \omega \cdot \cos(\omega t) \cdot r), \quad v^2 = r^2 \omega^2$$

$$\frac{dv}{dt} = a = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}\right) = (-\omega^2 \cos(\omega t) \cdot r, \ -\omega^2 \sin(\omega t) \cdot r)$$

$$a^2 = r^2 \omega^4$$

$$a = r\omega^2 = v \cdot \omega$$

$$\vec{F}_{doś} = m \cdot \vec{a} \,, \quad F_{doś} = m \cdot r\omega^2 = m \cdot r \cdot \frac{v^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$