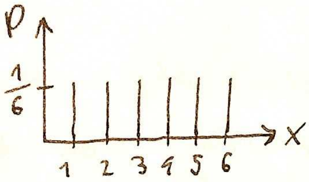
ZMIENNA LOSOWA

Długość, masa – obarczone błędem pomiaru, ale raczej nie losowe.
Ilość rozpadów pierwiastka promieniotwórczego, ilość uderzeń serca na minutę, rzut monetą – losowe (dyskretne), obarczone błędem pomiaru + odchyleniem zmiennej losowej od średniej (n_1 rozpadów los. + n_2 zliczeń niedokładna)

DYSKRETNA

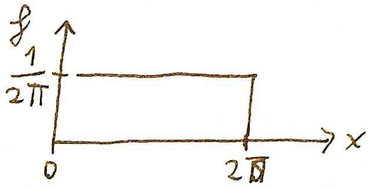
Rzut kostką, monetą



$$P(x) = \frac{1}{6}$$

CIĄGŁA

Kąt przy strzale do tarczy



$$f(x) = \frac{P(x \in \{x; x+dx\})}{dx} = \frac{1}{2\pi}$$

Wartość oczekiwana = średnia:

$$\bar{x} = \langle x \rangle \equiv \sum P(x) \cdot x = \mu$$

$$\bar{x} = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3{,}5$$

$$\bar{x} \equiv \int_{a=0}^{b=2\pi} x f(x)\, dx = \lim_{\sum \to \int} \sum x \cdot P(x)$$

$$\bar{x} = \int_a^b \frac{1}{2\pi} \cdot x\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

Odchylenie (≠ niepewność):

$$D(x) = \sqrt{V(x)} = \sigma$$

$$\sigma^2 \equiv \sum (x-\mu)^2 \cdot P(x) = \langle (x-\mu)^2 \rangle$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{6} \cdot \left(2{,}5^2 + 1{,}5^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2 + 1{,}5^2 + 2{,}5^2\right) = \frac{17{,}5}{6}$$

$$\sigma \simeq 1{,}71$$

$$\sigma^2 \equiv \int (x-\mu)^2 f(x)\, dx = \langle (x-\mu)^2 \rangle$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int (x^2 + \mu^2 - 2x\mu)\, dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{x^3}{3} + \mu^2 x - 2\mu \frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{8}{3}\pi^3 + 2\pi^3 - 4\pi^3\right) = \frac{\pi^2}{3} \equiv \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \equiv \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

$$P\left(x \in (\mu+\sigma;\mu-\sigma)\right) = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)\,dx$$

Sensownie można policzyć dla zmiennej ciągłej:

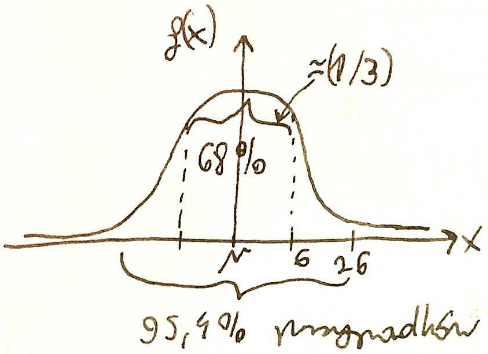
$$P = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \frac{1}{2\pi} \times d = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 58\%$$

i tak dla każdego płaskiego rozkładu.

Głównym rozkładem niepłaskim jest rozkład Gaussa:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

– symetryczny, odchylenie σ, średnia μ.



Częsty, bo występuje, gdy zmienna zależy od wielu czynników podobnie istotnych. Suma wielu zmiennych ma ten rozkład.

Niepłaskie rozkłady dyskretne:

Bernoulliego: dwa możliwe stany; A i B, n obiektów; np. orzeł i reszka na n monetach:

$\underbrace{A,B,A,A,B,A,A,B,A,B}_{\times n}$ $\quad P(A) = p$, $P(B) = 1-p = q$ np. po 50% dla idealnie ~~symetry~~ symetrycznej monety

$$P_B(k\times A, (n-k)\times B) = \binom{n}{k} p^{k} (1-p)^{n-k}$$

$p^k \to p^{il.\,A}$, $(1-p)^{n-k} \to q^{il.\,B}$

$\binom{n}{k}$ – ilość kombinacji ułożeń A i B na n miejscach

Inaczej dwumianowy. $\mu = n\cdot p$, $\sigma^2 = npq$

$$\frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{pq}}{p}\cdot\frac{\sqrt{n}}{n} = \sqrt{\frac{q}{p}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$$

→ odchylenie względne maleje z n.

Np. możemy mieć 10 ± 1 albo 10000 ± 10

Rozkład Poissona:

Jeśli wiemy, że coś jest średnio μ na jakiś konkretny przedział A, to jakie jest P(będzie tego $n\times$ w przedziale A)?

$$P_P(n) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}$$

, $\mu = \lambda \cdot A$ - wielkość przedziału

λ – stała gęstość na wielkość przedziału

$n = 0,1,2,3 \ldots$
często blisko μ.

np. $8\times$ na minutę

$\mu = 8$ dla P($n\times$ w czasie 1 min)

$\mu = 24$ dla P($n\times$ w czasie 3 min)

Tw:

$\mu = \mu$, $\sigma^2 = \mu$,

Jeśli dla rozkładu Bernoulliego $\mu = \underset{\text{duże}}{n} \cdot \underset{\text{małe}}{p}$ to $P_B(k) \approx P_P(k)$

Zamiast liczyć

$$\binom{10000}{5} \cdot (0{,}001)^5 \cdot (0{,}999)^{9995}$$

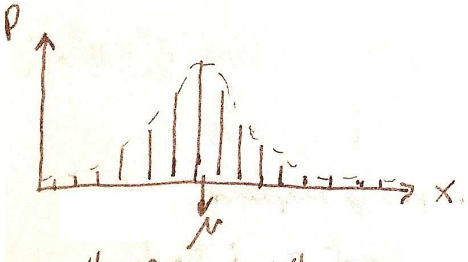
, $n = 10000$, $p = 0{,}001$, $\mu = 10$

$q = 0{,}999 \approx 1$

liczymy

$$\frac{10^5}{5!} e^{-10}$$

Podobnie dla dużych μ i P_B i P_P są jak rozkład Gaussa o $\overset{\text{Pois.}}{\mu = \mu}$ lub $\overset{\text{Bern.}}{\mu = np}$ i $\overset{\text{Pois.}}{\sigma = \sqrt{\mu}}$ lub $\overset{\text{Bern.}}{\sigma = \sqrt{npq}}$ (p małe, $q \approx 1$).



dla $P_P = \mu$ dla P Gaussa

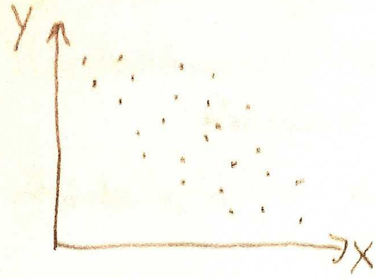
P_P lub P_B → Gaussa.

n duże
p małe

$$P(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \underset{\sigma^2}{\mu}}} e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\mu}}$$

Korelacja

Mierzymy X i Y i wykreślamy $P(X,Y)$:

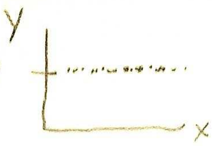


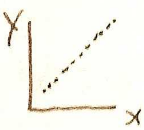
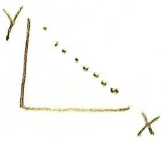
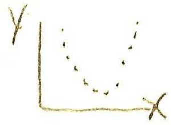
Widać, że dla większych X, Y są mniejsze, jest korelacja, $corr(X,Y) \neq 0$

$$\text{Kowariancja} = \iint f(x,y)\cdot(x-\mu_x)(y-\mu_y)\,dx\,dy$$

$$\text{Korelacja Pearsona} = \underbrace{\frac{cov(X,Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}}_{\text{normalizacja.}} = corr(X,Y) = \rho$$

Jeśli są nieskorelowane, to $P(X=x_0 \text{ i } Y=y_0) = P(X=x_0)\cdot P(Y=y_0)$

$\rho \in (-1,1)$:  lub  $\rho = 0$

 $\rho = 1$  $\rho = -1$  $\rho = 0$, tu trochę zawodzi *

*Zawodzi, bo ρ to współczynnik korelacji <u>liniowej</u>.

Ważne!!

Dla $z = a\cdot x + b\cdot y$ → suma $a\cdot x$ i $b\cdot x$

$\mu_z = a\cdot\mu_x + b\cdot\mu_y$ → μ się dodają, $a\cdot x$ ma $a\cdot\mu_x$

$\sigma_z^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2$ → $\sigma^{\boxed{2}}$ się dodają, $a\cdot x$ ma $\sigma_{ax}^2 = a^2\sigma_x^2$

i $\sigma_{ax} = a\cdot\sigma_x$

Duże wartości mierzone tym samym przyrządem są najczęściej skorelowane (ten sam błąd i rozrzut tu i tu).

Na czym polega pomiar?

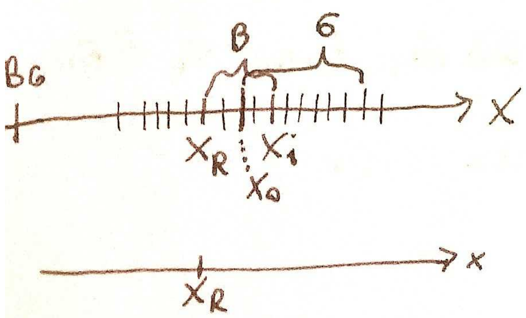
Wyznaczenie np. długości nie jest takie proste bo:
- wzór 1 metra jest daleko, producent naszego przyrządu wprowadził pierwszą niedokładność,
- długość zależy np. od temperatury,
- my możemy źle odczytywać:  gdzie kończy się przedmiot?

 jak ustawić metr idealnie płasko i wzdłuż blachy? (a nie lekko na ukos)

Ale mierząc np. średnie spalanie / 100 km mamy o wiele więcej problemów: - czy nie jedziemy pod wiatr, - czy nie ma upałów → wydajność spada, włączamy klimatyzację, - czy jedziemy wolno czy szybko,
- czy nie jechaliśmy pod górę częściej niż w dół,
- itp. itd., zmiennych jest mnóstwo.

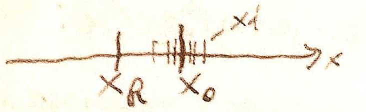
Podając wynik <u>musimy</u> <u>podać warunki i dokładność.</u>

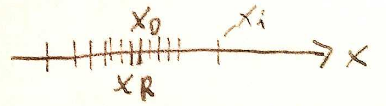
Cechy pomiaru



X_R - wartość rzeczywista
X_i - i-ty wynik pomiaru
B - błąd, B_G - błąd gruby
$X_0 = \mu = \bar{x}$ - wartość oczekiwana, średnia, w pomiarze
6 - jedno odchylenie standardowe: tu <u>niepewność</u>

Błąd gruby, mocno odstający rozpoznajemy i odrzucamy.

 - pomiar precyzyjny, σ małe

 - pomiar dokładny, $|x_R - x_0|$ mała

Pomiar to określenie x_0 i σ.

x_0 i σ

Wartości te określa się różnie:

- dla wartości mierzonych raz (masa, długość, opór) - typ B,
- dla wartości mierzonych wiele razy (czas, ilość zdarzeń w danym czasie, grubość blachy mierzona w kilku miejscach) - typ A.

Często x_R nie można poznać, można tylko wykonywać dokładniejsze i precyzyjniejsze pomiary. x_R może być stałe tylko dla niezmiennych wartości, np. masy, a np. opór zależy od temperatury, $x_{R\,oporu} = x_R(T)$.

x_0 i σ to zawsze zmienne losowe: inny czas, inny naukowiec, inny przyrząd - wszystko daje inne x_0 i σ.

σ - niepewność x - oznaczamy przez $u(x)$.

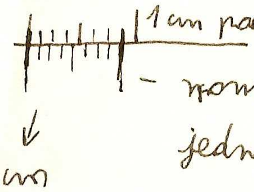
Typ B – pomiar jednokrotny

x_0 to po prostu wartość zmierzona.

σ jest jasno określona dla przyrządu albo jest ustalana przez badacza.

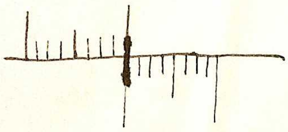
Dla długości jest to wartość najmniejszej podziałki.

Np. suwmiarka:

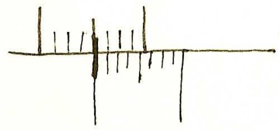


1 cm podzielony na 10 części (8 dla rysunku)

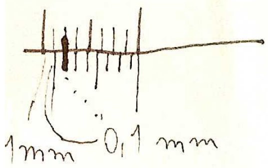
– noniusz podzielony na 10 części, długości $\frac{9}{10}$ cm, jedna część długości $\frac{9}{100}$ cm $= \frac{9}{10}$ mm.



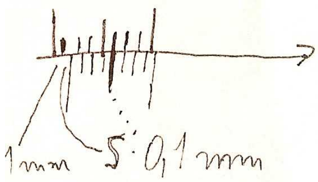
→ 1 cm



→ 0,5 cm



→ żeby zetknęły się te linie, noniusz musiał przejść $(1-0{,}9)$ mm $= 0{,}1$ mm, łącznie mamy 1,1 mm.



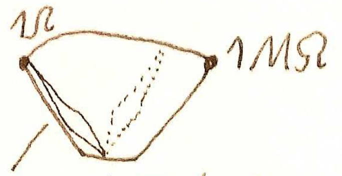
→ piąta z 10 części noniusza, $5 \cdot 0{,}1$ mm $= 0{,}5$ mm łącznie $(1 + 0{,}5)$ mm.

Dokładność = 0,1 mm. Ale mierząc coś co ma 20 cm raczej nie przyłożymy suwmiarki idealnie, ustalamy dokładność równą np. 1 mm.

Oprócz mierzonej wielkości (dużej lub małej dla przyrządu) i wielkości podziałki skali liczy się zakres.

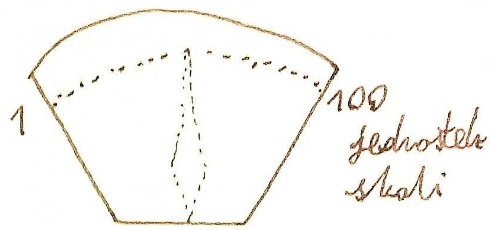
Waga nie ma zakresu – mierzy 1 mg ÷ 1 kg albo 1 kg ÷ 10 ton, ale mierząc np. opór od 1Ω do 1MΩ używamy jednego miernika, ale innych zakresów podzielone tą samą skalą:

Nie



tu bez dokładności, nie odróżnimy 4 i 5Ω

ale tak:



Na zakresie do 10Ω:

$100j = 10\Omega$, $j = 0{,}1\Omega$.

Na zakresie do 1MΩ:

$100j = 10^6\Omega$, $j = 10k\Omega$.

Na zakresie do 50kΩ:

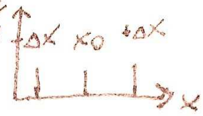
$100j = 50\cdot 10^3\Omega$, $j = 500\Omega = 0{,}5k\Omega$.

Widać, że dokładność się zmienia.

Niepewność $= C_1 \cdot x_{zmierzone} + C_2 \cdot$ zakres, $C_{1,2}$ podane są w dokumentacji przyrządu. Podsumowując typ B:

- jeden pomiar,
- $\sigma = u(x)$ zależy od x i zakresu, może być równe podziałce i zmierzone przez badacza.

Często dla C_1 i C_2 mamy niepewność graniczną Δx – maksymalny błąd. Zakładając rozkład jednostajny



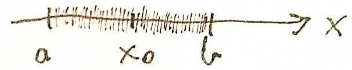
mamy $\sigma = u(x) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \frac{\Delta x - (-\Delta x)}{2\sqrt{3}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$.

Typ A – wiele wyników dla jednej wielkości

Kiedy mierzymy np. ile samochodów zdąży przejechać na zielonym, to cały czas mamy inną wartość x_i. Różna wartość może wynikać też z metody i narzędzi: np. pomiar czasu stoperem zależy od naszej reakcji. Z jednej strony możemy być zawsze za wolni (błąd systematyczny – dla typu B też występuje, np. zły sposób użycia miarki), a z drugiej i tak zawsze trochę losowo trafimy w x_i milisekund. X_0 i σ estymujemy. Estymator to wzór na jakiś parametr, a wartość ze wzoru to estymata.

Estymator dla x_0 – głównie średnia $\bar{x} = \sum_i x_i \cdot \frac{1}{n} = X_0$.

Może być inny, np. dla rozkładu jednostajnego:



$$\text{Est. } x_0 = \frac{\min(x_i) + \max(x_i)}{2}$$

Estymator dla σ ($u(x)$) – odchylenie $\sum_i \sqrt{\frac{(x_i - x_0)^2}{n-1}}$ …… $(n-1)$ daje lepszy estymator niż $/n$.

X_0 też jest zmienną losową. Jakie jest jej odchylenie?
(inna grupa x_i da inną średnią)

$\langle x_0 \rangle = \langle \sum \frac{x_i}{n} \rangle$, $V(x_0) = \sum \frac{V(x_i)}{n} = \sum \sqrt{\frac{(x_i - x_0)^2}{n(n-1)}}$ – odchylenie średniej, czyli naszego wyniku. Właściwie oznacza się:

$$\left.\begin{array}{l} \langle x \rangle = \mu = \bar{x} \\ \langle (x-\mu)^2 \rangle = \sigma^2 = V(x) \\ \sigma = \sqrt{\sigma^2} = D(x) \end{array}\right\} \text{prawdziwe wartości dla rozkładu}$$

odchylenie standardowe

$$\left.\begin{array}{l} \mu \to \bar{x} = X_0 \\ \sigma \to u(x) \end{array}\right\} \text{nasze estymacje tych wartości}$$

niepewność standardowa

Składanie niepewności

Co jeśli chcemy uwzględnić niepewność dla przyrządu i dla serii pomiarów? Składa się je tak: $u_{TOT} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots}$

Co jeśli wyznaczamy dwie wielkości, aby otrzymać trzecią?

Np. $I = mr^2$, $u(I) = \left(\left(\frac{\partial I}{\partial m}\cdot u(m)\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial r}\cdot u(r)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Sumowanie kwadratów oznacza niezależność argumentów:

$u_{TOT}^2 = u_1^2 + u_2^2$

Gdyby trzecia niepewność była zależna od u_1 i u_2 to moglibyśmy jako funkcja znaleźć się na płaszczyźnie. Jeśli jest niezależna, to musi być wzdłuż osi 'Z'.

Pochodne mówią, jak zmienia się funkcja ze zmianą argumentu. W pełni jest to szereg Taylora, ale dla $u(x) << x$ (zmiana losowa x) (niepewność oznacza małe zmiany x) pomijamy wyrazy wyższych rzędów. $\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\cdot \Delta x$

$u(f(x_1, x_2 \ldots)) = \left(\sum_{x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i)\right)^{\frac{1}{2}}$ – prawo przenoszenia niepewności.

u_{TOT} – niepewność złożona,

u(seria pomiarów) – niepewność standardowa,

u(przyrząd) – to samo ale dla przyrządu, czasami Δx – max błąd

może być tu też u(błąd ludzki), np. gdzie w mikroskopie obraz jest ostry?

Niepewność rozszerzona i porównanie wyników

$U(x) = 2\cdot u(x)$ – niepewność mnożymy przez 2, bo tak ustalono.

$U(x_1 - x_2) = \{2\cdot\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\} = 2\cdot\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2} < |x_1 - x_2|$ to wyniki nie są zgodne.

Dla tablic $u(x_2)$ dajemy 0: $2\cdot u(x) < |x - x_{TAB}|$ to wyniki nie są zgodne.

ZAPIS

1) Niepewność skracamy do dwóch cyfr znaczących, a wartość $\bar{x}$ do tylu po przecinku ile w niepewności:

$u(x)$: $0{,}011\cancel{3872}\ldots$ $\quad 2{,}4\cancel{51}\ldots$ $\quad 24\cancel{183{,}1}\ldots \rightarrow 24000$

x: $1122{,}456\cancel{18}\ldots$ $\quad 20{,}\cancel{1487}\ldots.$ $\quad 310781\cancel{078{,}52}\ldots$ $\quad 310781000$

2) Zapis x i $u(x)$: $x = 10{,}821\,j$, $u(x) = 0{,}011\,j$, $U(x) = 2 \cdot 0{,}011\,j = 0{,}022\,j$

1) pełny słowny

2) $x = 10{,}821(11)\,j$ lub $x = (10{,}821 \pm 0{,}022)\,j$

3) $x = 10{,}821\,j$; $u(x) = 0{,}011\,j$ lub $x = \ldots$, $U(x) = \ldots.$

3) Duże liczby (lub bardzo małe) zapisujemy z potęgą 10^n, albo przedrostkami M, G, μ, n itp.

4) Tabele i rysunki numeruje się i daje krótki opis - nawet kopię z tekstu. Tabele nad, rysunki pod.

5) WZORY: - numery, - opis wszystkich wielkości w tekście, - zmienne kursywą, - dłuższe zlepki, nazwy funkcji (np. sin, log), indeksy górne i dolne, jednostki - czcionka prosta, - przed jednostką spacja, np. 5 zł a nie 5zł.

6) Wykresy i rysunki to raczej to samo, linie, liczby i punkty wyraźnie, musi być opis osi i jednostka na osi.

7) Jeśli są wnioski, to są to nowe zdania i pomysły, a nie podsumowanie - tam są streszcza, główne wyniki.