Kolokwium 1a

Algebra

30 listopada 2022

Zadanie 1 (5p+8p)**.** Wykorzystując odpowiednią postać liczby zespolonej oraz adekwatne twierdzenia, znajdź wszystkie rozwiązania następujących równań w ciele liczb zespolonych.

(a) $z^3 = (4-2i)^6$,

(b) $z^6 - 8z^5 + 27z^4 - 48z^3 + 51z^2 - 40z + 25 = 0$, wiedząc że $z_0 = 2 - i$ jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu:
$w(z) = z^6 - 8z^5 + 27z^4 - 48z^3 + 51z^2 - 40z + 25$.

Zadanie 2 (5p+4p)**.** W zbiorze liczb naturalnych dodatnich określamy relację $R = (\mathbb{N}_+, \mathrm{gr}R, \mathbb{N}_+)$ jako: $xRy \iff$ istnieją liczby naturalne k, l takie, że $x^k = y^l$.

(a) Czy R jest relacją porządku czy równoważności? Udowodnij.

(b) Jeżeli R jest relacją porządku, to wskaż, o ile istnieją, kresy zbioru $\{8, 9, 10, 15\}$. Jeżeli R jest relacją równoważności, to wyznacz liczebności wszystkich klas równoważności i określ, które spośród liczb $1, 2, \ldots, 20$ są najmniejsze w swojej klasie równoważności.

Zadanie 3 (10p+3p+3p)**.** W zbiorze liczb rzeczywistych określamy działanie $\oplus$ w następujący sposób: $a \oplus b = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)^3$.

(a) Udowodnij, że $(\mathbb{R}, \oplus, \cdot)$, gdzie $\cdot$ to zwykłe mnożenie liczb rzeczywistych, jest ciałem.

(b) Czy gdyby wymienić działanie $\oplus$ na: $a \boxplus b = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$, to ta struktura również byłaby ciałem? Uzasadnij odpowiedź.

(c) Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie odwzorowaniem takim, że: $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Sprawdź, czy f jest homomorfizmem grup $(\mathbb{R}, \oplus)$ oraz $(\mathbb{R}, +)$.

Zadanie 4 (12p)**.** Zbadaj, które z poniższych zdań są prawdziwe. Podaj odpowiedź i ją uzasadnij.

(a) Zbiór $A = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f$ ma miejsce zerowe w przedziale $[0, 1]\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) Istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^2$, w której wektory $(6, 1)$ i $(9, 4)$ mają współrzędne odpowiednio $[8, -11]$ i $[7, -9]$.

(c) Zbiór $\{(1, 1, 2, 1), (3, 5, 2, 4), (-1, -5, 6, -3)\}$ jest bazą przestrzeni wektorowej $\mathrm{Lin}\{(1, 1, 2, 1), (3, 5, 2, 4), (-1, -5, 6, -3)\}$.