Kolokwium 2a

Algebra

18 stycznia 2023

Zadanie 1 (13p). Znajdź rzut l' prostej $l : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{-1}$ na płaszczyznę $\pi : -x+2y+z+3=0$. Wyznacz równanie normalne płaszczyzny zawierającej proste l i l'. Znajdź kąt między prostymi l i l'.

Zadanie 2 (11p). Wyznacz liczbę rozwiązań układu równań w zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} (p+1)x & +py & +pz & = & p \\ px & +py & +pz & = & p+1 \\ p^2x & +py & +p^2z & = & p \\ 5px & +py & +5pz & = & p \end{cases}$$

Zadanie 3 (13p). Niech U będzie przestrzenią liniową, a $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ będzie bazą U.

(a) Endomorfizm $f : U \to U$ spełnia warunek $f(e_i) = e_{i+1}$ dla $i = 1, \dots, n-1$, oraz $f(e_n) = e_1$. Udowodnij, że f jest iniekcją.

(b) Endomorfizm $g : U \to U$ spełnia warunek $g(e_i) = e_1$ dla $i = 1, \dots, n-1$, oraz $g(e_n) = e_n$. Wyznacz wymiary $\operatorname{Ker} g$ oraz $\operatorname{Im} g$.

Zadanie 4 (14p). Niech $L : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_1$ będzie odwzorowaniem liniowym, a B_1 oraz B_2 - bazami odpowiednio $\mathbb{R}[x]_2$ oraz $\mathbb{R}[x]_1$, gdzie:

$B_1 : p_1(x) = x^2, \;\; p_2(x) = x^2+1, \;\; p_3(x) = x^2+x+1,$
$B_2 : q_1(x) = 1, \;\; q_2(x) = x+1.$

Wiedząc, że: $(Lp_1)(x) = 2x$, $(Lp_2)(x) = x+1$, $(Lp_3)(x) = -x+1$:

(a) wyznacz macierz tego odwzorowania w bazach B_1 i B_2. Wykorzystując tę macierz, oblicz wartość odwzorowania dla wektora $p(x) = -x^2+x$.

(b) Wyznacz macierz tego odwzorowania w bazach standardowych (tj. $(1, x, x^2, \dots)$).

(c) Określ wymiary jądra i obrazu odwzorowania L. Podaj $\operatorname{Im} L$.