Kolokwium 1b

Algebra

15 grudnia 2023

Zadanie 1 (5p+8p)**.**

(a) Rozwiąż w ciele liczb zespolonych równanie: $z^3 - z^2 - 9iz + 9i = 0$.

(b) Zilustruj na płaszczyźnie zespolonej zbiór: $\{z \in \mathbb{C} : |\bar{z} + 2| = |\bar{z} + 1 + i|\}$.

Zadanie 2 (5p+4p)**.** W zbiorze $\mathbb{R}^2$ dana jest relacja $(\mathbb{R}^2, S, \mathbb{R}^2)$ taka, że dla dowolnych (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x_1, y_1)S(x_2, y_2) \iff (x_1 + y_1 \leqslant x_2 + y_2) \ \wedge \ (x_1 - y_1 \leqslant x_2 - y_2)$$

(a) Czy S jest relacją porządku czy równoważności? Udowodnij.

(b) Jeżeli S jest relacją porządku, to wyznacz (narysuj na płaszczyźnie) majoranty zbioru $A = \{(0, 2), (1, 0)\}$. Czy zbiór A jest łańcuchem? Jeżeli S jest relacją równoważności, to wyznacz klasy równoważności wektorów $(0, 0)$ oraz $(0, 1)$.

Zadanie 3 (10p+3p+3p)**.** W zbiorze liczb rzeczywistych określamy działanie $\odot$ w następujący sposób: $x \odot y = xy - x - y + 2$.

(a) Sprawdź, czy $G_1 = (\mathbb{R}, \odot)$ jest grupą abelową.

(b) Sprawdź, czy $G_2 = (\mathbb{R} \setminus \{1\}, \odot)$ jest grupą abelową.

(c) Niech f będzie odwzorowaniem takim, że: $f(x) = x-1$. Sprawdź, czy f jest homomorfizmem z grupy $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ w tę ze struktur G_1, G_2, która jest grupą.

Zadanie 4 (12p)**.** Dany jest podzbiór $A = \{p \in \mathbb{R}[x]_2 : p(1) + p(-1) = p'(0)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$.

(a) Udowodnij, że A jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$.

(b) Znajdź bazę i wymiar podprzestrzeni A.

(c) Czy podzbiór $C = \{p \in A : p(1) = p(0) + 1\}$ stanowi podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$? Odpowiedź uzasadnij.

(d) Czy zbiór $D = \{3x^2 + 2x - 2, -4x^2 + 2x + 3\}$ stanowi bazę podprzestrzeni A? Odpowiedź uzasadnij.

(e) Udowodnij, że jeśli V jest przestrzenią wektorową i $V \neq \{\mathbf{0}\}$, to $V + V = V$, ale nie jest to suma prosta.