Kolokwium 2a

Algebra

19 stycznia 2023

Zadanie 1 (13p). Dane są proste:

$$l_1\colon \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 + t \\ z = 9 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad l_2\colon \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 7 - 4t \\ z = -5 + 9t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

oraz płaszczyzna $\pi : x + y - 3z + 9 = 0$. Znajdź kąt pomiędzy prostymi l_1 i l_2. Niech ΔABC będzie trójkątem, którego dwa boki zawierają się w prostych odpowiednio l_1 i l_2, a trzeci bok leży na płaszczyźnie π. Oblicz pole rzutu trójkąta ΔABC na płaszczyznę π.

Zadanie 2 (11p). Wyznacz liczbę rozwiązań układu równań w zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} (p-4)x & +y & +pz & = & p \\ 3x & -py & -pz & = & -p \\ (p-5)x & +py & +2z & = & p \\ (p-6)x & +py & +pz & = & 3 \end{cases}$$

Zadanie 3 (13p). Dana jest przestrzeń wektorowa $V = \mathbb{C}^2(\mathbb{R})$.

(a) Ile jest odwzorowań liniowych $f : V \to V$ spełniających warunki:

$$f(1+i, -1-i) = (2, -i), \quad f(2-i, 2i) = (-3, 2), \quad f(4+i, -2) = (1, 2+3i)?$$

(b) Wyznacz wymiary jądra i obrazu odwzorowania $g : V \to V$ danego wzorem: $g(z_1, z_2) = (\operatorname{Re} z_1, z_1 + i \operatorname{Im} z_2)$.

Zadanie 4 (14p). Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie odwzorowaniem liniowym danym wzorem:

$$f(x, y, z) = (7x - 2y - 2z, 3x + y),$$

a $B_1 = ((1,1,0), (-1,0,-1), (0,0,1))$ oraz $B_2 = ((1,2), (0,-1))$ – bazami odpowiednio $\mathbb{R}^3$ oraz $\mathbb{R}^2$.

(a) Wyznacz macierz odwzorowania f w bazach B_1 i B_2. Wykorzystując tę macierz, oblicz $f(1, 1, -1)$.

(b) Wyznacz macierz przejścia z bazy B_1 do bazy kanonicznej.