

Kolokwium 1a

Algebra

29 listopada 2024

Zadanie 1 (9p). Wykorzystując adekwatne twierdzenia, znajdź w ciele liczb zespolonych wszystkie rozwiązania równania:

$$z^7 + 4z^6 + 8z^5 + 16z^4 + 36z^3 + 64z^2 + 64z + 32 = 0,$$

wiedząc że $z_0 = -1 + i$ jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu:

$$w(z) = z^7 + 4z^6 + 8z^5 + 16z^4 + 36z^3 + 64z^2 + 64z + 32.$$

Rozwiązania podaj w postaci algebraicznej.

Zadanie 2 (6p+5p). W zbiorze $\mathbb{R}$ dana jest relacja $(\mathbb{R}, S, \mathbb{R})$ taka, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$:

$$xSy \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = y + k\sqrt{2}.$$

- (a) Czy S jest relacją porządku czy równoważności? Udowodnij.
- (b) Jeżeli S jest relacją porządku, to wyznacz kres górny zbioru $A = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$. Czy zbiór A jest łańcuchem (uzasadnij odpowiedź)? Jeżeli S jest relacją równoważności, to wyznacz klasę równoważności elementu $\sqrt{3}$. Czy istnieje klasa równoważności zawierająca jednocześnie π oraz e (uzasadnij odpowiedź)?

Zadanie 3 (10p+5p). W zbiorze liczb rzeczywistych ujemnych określamy działanie $\odot$ w następujący sposób: $x \odot y = -xy$.

- (a) Sprawdź, czy $G = (\mathbb{R}_-, \odot)$ jest grupą abelową.
- (b) Niech f będzie odwzorowaniem takim, że: $f(x) = \frac{1}{x}$. Sprawdź, czy f jest automorfizmem grupy G .

Zadanie 4 (6p+6p+3p).

- (a) Dana jest podprzestrzeń:

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \wedge 2x_1 - x_2 - x_4 = 0\}$$

przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Znajdź bazę i wymiar podprzestrzeni A .

- (b) Jaki jest wymiar podprzestrzeni $C = \text{Lin}\{x^2 - x + 1, x^2 + 3x + 3, x^2 - 3x\}$ przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$?
- (c) Niech $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1 = 0\}$, $V_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_3 = 0\}$, będą podprzestrzeniami przestrzeni $V = \mathbb{R}^5$. Udowodnij, że $V = V_1 + V_2$, ale nie jest to suma prosta.