

Kolokwium 1b

Algebra

29 listopada 2024

Zadanie 1 (9p). Wykorzystując adekwatne twierdzenia, znajdź w ciele liczb zespolonych wszystkie rozwiązania równania:

$$z^7 - 4z^6 + 8z^5 - 28z^3 + 64z^2 - 64z + 32 = 0,$$

wiedząc że $z_0 = 1 + i$ jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu:

$$w(z) = z^7 - 4z^6 + 8z^5 - 28z^3 + 64z^2 - 64z + 32.$$

Rozwiązania podaj w postaci algebraicznej.

Zadanie 2 (6p+5p). W zbiorze $\mathbb{Z}^2$ dana jest relacja $(\mathbb{Z}^2, S, \mathbb{Z}^2)$ taka, że dla dowolnych $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2$:

$$(x_1, y_1)S(x_2, y_2) \iff x_1 + y_1\sqrt{2} \leq x_2 + y_2\sqrt{2}.$$

- (a) Czy S jest relacją porządku czy równoważności? Udowodnij.
- (b) Jeżeli S jest relacją porządku, to wyznacz elementy maksymalne i minimalne zbioru $A = \{(5, 0), (0, 4), (2, 2)\}$. Czy zbiór A jest łańcuchem (uzasadnij odpowiedź)? Jeżeli S jest relacją równoważności, to wyznacz klasę równoważności elementu $(0, 1)$. Czy istnieje klasa równoważności zawierająca jednocześnie $(-1, 0)$ oraz $(0, -1)$ (uzasadnij odpowiedź)?

Zadanie 3 (10p+5p). W zbiorze liczb rzeczywistych ujemnych określamy działanie $\odot$ w następujący sposób: $x \odot y = -xy$.

- (a) Sprawdź, czy $G = (\mathbb{R}_-, \odot)$ jest grupą abelową.
- (b) Niech f będzie odwzorowaniem takim, że: $f(x) = \frac{1}{x}$. Sprawdź, czy f jest automorfizmem grupy G .

Zadanie 4 (6p+6p+3p).

- (a) Dana jest podprzestrzeń:

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \wedge x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$$

przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Znajdź bazę i wymiar podprzestrzeni A .

- (b) Jaki jest wymiar podprzestrzeni $C = \text{Lin}\{x^2 + x - 1, x^2 + 3x + 3, x^2 - 3\}$ przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$?
- (c) Niech $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_2 = 0\}$, $V_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_4 = 0\}$, będą podprzestrzeniami przestrzeni $V = \mathbb{R}^5$. Udowodnij, że $V = V_1 + V_2$, ale nie jest to suma prosta.