

Kolokwium 2a

Algebra

27 stycznia 2025

Zadanie 1 (13p). Dane są punkty $A = (4, 6, -1)$, $B = (-2, 4, 3)$, $C = (3, -1, 1)$, $D = (2, 2, -1)$. Wyznacz równanie prostej l przechodzącej przez punkty A i B oraz prostej k przechodzącej przez punkty C i D . Zbadaj wzajemne położenie tych prostych. Znajdź rzut punktu C na prostą l .

Zadanie 2 (8p+3p). (a) Wyznacz liczbę rozwiązań układu równań w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} (3+p)x & +(3+p)y & +pz & = & 2 \\ & x & +(1-p)y & & = & -2 \\ (1-p)x & & & +y & & = & p \end{cases}$$

(b) Dany jest macierzowy układ równań: $Ax + B = Cx + D$. Sformułuj warunek (wykorzystujący macierze A, B, C, D), kiedy ten układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Zadanie 3 (10p). Wyznacz wzór odwzorowania liniowego $L : \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$ spełniającego następujące warunki: $\text{Ker } L = \text{Lin}\{-2 + 3x^2, 3 + x + x^2\}$ oraz $(L(p))(x) = 1 + 3x + 9x^2$, gdzie $p(x) = x^2$.

Zadanie 4 (10p+6p). Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem liniowym danym wzorem:

$$f(x, y) = (5x - 2y, 3x + 4y, x),$$

a $B_1 = ((1, 1), (-1, 0))$ oraz $B_2 = ((0, 1, 1), (1, 2, 0), (1, 0, 0))$ – bazami odpowiednio $\mathbb{R}^2$ oraz $\mathbb{R}^3$.

(a) Wyznacz macierz odwzorowania f w bazach B_1 i B_2 . Wykorzystując tę macierz, oblicz $f(-3, 2)$.

(b) Określ wymiary jądra i obrazu odwzorowania f . Podaj $\text{Ker } f$.