

Kolokwium 1a

Algebra

4 grudnia 2025

Zadanie 1 (9p). Wykorzystując adekwatne twierdzenia, znajdź w ciele liczb zespolonych wszystkie rozwiązania równania:

$$z^7 + 4z^6 + 8z^5 + 16z^4 + 36z^3 + 64z^2 + 64z + 32 = 0,$$

wiedząc że $z_0 = -1 + i$ jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu:

$$w(z) = z^7 + 4z^6 + 8z^5 + 16z^4 + 36z^3 + 64z^2 + 64z + 32.$$

Rozwiązania podaj w postaci algebraicznej.

Zadanie 2 (6p+4p). Dana jest relacja $(\mathbb{Q}, R, \mathbb{Q})$ taka, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}$:

$$xRy \iff x - y \in \mathbb{Z}.$$

- (a) Czy R jest relacją porządku czy równoważności? Udowodnij.
- (b) Jeżeli R jest relacją porządku, to wyznacz kres górny zbioru $A = [0, 1)$. Czy zbiór A jest łańcuchem (uzasadnij odpowiedź)? Jeżeli R jest relacją równoważności, to wyznacz klasę równoważności elementu 0. Jaka jest największa liczba ujemna, która należy do klasy równoważności elementu $\frac{3}{4}$?

Zadanie 3 (15p). W zbiorze liczb rzeczywistych określamy działania $\oplus, \odot$ w następujący sposób:

$$a \oplus b = a + b - 1 \quad a \odot b = a + b - ab.$$

Udowodnij, że $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ jest ciałem.

Zadanie 4 (18p). Zbadaj, czy podany zbiór stanowi podprzestrzeń liniową przestrzeni wektorowej V . Jeżeli tak, wyznacz bazę i wymiar tej podprzestrzeni.

- (a) $U_1 = \{p \in \mathbb{R}[x]_2 : p(x) = ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{Z}\}; V = \mathbb{R}[x]_2,$
- (b) $U_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 z_2 = -1\}; V = \mathbb{C}^2,$
- (c) $U_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 = 0 \wedge 2x_2 + x_4 = 0\}; V = \mathbb{R}^4,$
- (d) $U_4 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(0) \geq 0\}; V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$