

Fizyka Techniczna, Matematyka II, Zestaw 11

Całki krzywoliniowe

Całka zorientowana

1. Obliczyć całkę z funkcji $f(x, y) = (x - y, -4y^2)$ wzdłuż krzywej K zadanej przez funkcję:

(a) $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x) = x^2$, (b) $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, h(x) = x$.

Porównaj wyniki. Jeśli są takie same, to czy zawsze będą takie same? Jeżeli są różne, to dlaczego?

2. Obliczyć całkę z funkcji $f(x, y, z) = (-y, x, z^2)$ po linii śrubowej K określonej wzorami $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, t \in [0, 2\pi]$.
3. Obliczyć $\int_L x dx + y^2 dy + z^3 dz$, gdzie L jest krzywą zadaną równaniami $x = \sin t, y = \cos t, z = 2t, t \in [0, \pi]$.
4. Obliczyć $\int_K 2xy dx - x^2 dy$, gdzie K jest częścią paraboli $y = \frac{1}{4}x^2$ dla $x \in [0, 2]$.
5. Obliczyć $\int_K y dx - x dy$, gdzie K jest częścią okręgu $x^2 + y^2 = 16$ leżącą w drugiej i trzeciej ćwiartce układu i zorientowaną zgodnie z ruchem wskazówek zegara.
6. Obliczyć $\int_K (x + 2y) dx - (x^2 + y^2) dy$, gdzie K jest obwodem trójkąta o wierzchołkach $A = (0, 0), B = (-1, 1), C = (1, 1)$.
7. Obliczyć $\int_L 2x dx + y^2 dy$, gdzie L jest łamaną ABC , gdy $A = (0, 0), B = (2, 0), C = (2, 4)$.
8. Obliczyć $\int_K \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$, jeżeli K jest łukiem asteroidy $x(t) = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ od punktu $A = (a, 0)$ do punktu $B = (0, a)$.
9. Obliczyć pracę wykonaną pod wpływem siły $(2xy, x^2)$ z punktu $A = (1, 0)$ do $B = (2, 1)$ wzdłuż krzywej $y = \log_2 x$.
10. Obliczyć $\int_K x dx + yz dy + xz dz$, gdzie K jest łamaną o początku $A = (0, 0, 0)$, wierzchołku $B = (1, 0, 1)$ i końcu $C = (1, 1, 1)$.
11. Obliczyć $\int_K x dx + xz dy + z dz$, gdzie K jest dodatnio zorientowanym okręgiem danym równaniami $x^2 + y^2 = 1, z = 1$.
12. Obliczyć $\int_K e^x dx + y dy + z^2 dz$, gdzie K jest krzywą zadaną równaniami $y = \sqrt{3}x, z = \sqrt{x^2 + y^2}, x \in [0, 1]$.
13. Obliczyć $\int_K yz dx + x^2 y dy + x^2 dz$, gdzie K jest krzywą leżącą na przecięciu powierzchni $z = xy, y = x^2$ między punktami $(0, 0, 0)$ oraz $(1, 1, 1)$.
14. Dane jest pole wektorowe sił $R_x = x^3 - y, R_y = xy, R_z = 0$. Wyznaczyć pracę, jaką trzeba wykonać, pokonując siły pola wzdłuż łuku paraboli $y^2 = 8x$ od punktu $A = (0, 0)$ do $B = (2, 4)$.

15. Pole elektrostatyczne między okładkami kondensatora cylindrycznego ma natężenie K o składowych $K_x = a\frac{x}{r^3}$, $K_y = a\frac{y}{r^3}$, $K_z = 0$. Wyznaczyć pracę, którą trzeba wykonać, aby ładunek jednostkowy przesunąć wzdłuż prostej $y = 4t$, $x = 3t$, $z = 0$ z punktu $M = (3, 4, 0)$ do $P = (6, 8, 0)$.
16. Sprawdzić, że funkcje $P = 3x^2 + y^2$, $Q = 2xy - y$ spełniają warunek $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Znaleźć potencjał F oraz policzyć całkę krzywoliniową od punktu $(0, 0)$ do $(1, 1)$ wzdłuż krzywej zadanej wzorem $y = \frac{2}{\pi}x \arcsin(x)$.

Całka niezorientowana

17. Wyznaczyć masę linii $x = at$, $y = \frac{1}{2}at^2$, $z = \frac{1}{3}at^3$, dla $0 \leq t \leq 1$, jeżeli gęstość liniowa wyraża się funkcją $\rho(x, y, z) = \sqrt{\frac{2y}{a}}$.
18. Obliczyć masę łuku linii łańcuchowej $K: y(x) = a \cosh \frac{x}{a}$, $0 \leq x \leq a$, jeżeli gęstość w każdym jej punkcie jest odwrotnie proporcjonalna do rzędnej tego punktu.
19. Obliczyć masę łuku krzywej $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$, $0 \leq t \leq 1$, jeżeli gęstość łuku jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu promienia wodzącego punktu bieżącego krzywej i w punkcie $(1, 0, 1)$ jest równa 3.
20. Obliczyć współrzędne środka ciężkości jednorodnego łuku cycloidy $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$.
21. Obliczyć współrzędne środka ciężkości jednorodnego konturu trójkąta sferycznego $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.
22. Znaleźć pole części walcowej $x^2 + y^2 = a^2$ zawartej między płaszczyzną Oxy i powierzchnią $z = (x^2 + y^2)^3$.
23. Znaleźć pole powierzchni walcowej wzdłuż krzywej $x(t) = a(\cos t + t \sin t)$, $y(t) = a(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ zawartej pod powierzchnią $z = x^2 + y^2$.