Fizyka Techniczna, Matematyka II, Zestaw 12
Twierdzenie Greena

1. Korzystając ze wzoru Greena, obliczyć całki:

   (a) $\int_L 2y\mathrm{d}x + (x+1)^2\mathrm{d}y$, gdzie L jest obwodem trójkąta ABC, $A=(0,0)$, $B=(2,0)$, $C=(2,4)$.

   (b) $\int_K \left(\frac{y}{x+y}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{y}{x+y} + \ln(x+y) + 1\right)\mathrm{d}y$, gdzie K jest krzywą od punktu $(1,3)$ do $(2,3)$ wzdłuż paraboli $(x-1)(x-2) = y-3$.

   (c) $\int_K \frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ wzdłuż paraboli $y = 4 - x^2$ od punktu $(2,0)$ do punktu $(-2,0)$.

   (d) $\int_K \frac{2x}{\sqrt{y+x^2}}\mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{y+x^2}}\mathrm{d}y$, gdzie K jest łukiem okręgu $x^2+y^2=4$ (dodatnio zorientowanego) od punktu $(2,0)$ do punktu $(0,2)$.

2. Korzystając ze wzoru Greena, obliczyć pole figury ograniczonej:

   (a) asteroidą $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$,

   (b) elipsą $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

   (c) kardioidą $x(t) = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y(t) = a(2\sin t - \sin 2t)$,

   (d) pętlą liścia Kartezjusza $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$ (postać parametryczna: $x(t) = \frac{3at}{1+t^3}$, $y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}$,

   (e) łukiem epicykloidy $x(t) = 3(\frac{4}{3}\cos\frac{1}{3}t - \frac{1}{3}\cos\frac{4}{3}t)$, $y(t) = 3(\frac{4}{3}\sin\frac{1}{3}t - \frac{1}{3}\sin\frac{4}{3}t)$ oraz łukiem okręgu $x(t) = 3\cos\frac{1}{3}t$, $y(t) = 3\sin\frac{1}{3}t$.