Fizyka Techniczna, Matematyka II, Zestaw 14
Ekstrema lokalne, globalne i warunkowe

1. Znaleźć i scharakteryzować ekstrema funkcji:

   (a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{a^3}{x} + \dfrac{a^3}{y}$, $x > 0, y > 0$,

   (b) $g(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$,

   (c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x + 2z$,

   (d) $g(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$.

2. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

   (a) $f(x,y) = 3x^2 - y^2$ w kole $x^2 + y^2 \leq 4$,

   (b) $g(x,y) = x^2 + y^2$, w pierwszej ćwiartce koła jednostkowego,

   (c) $h(x,y) = x^3 - 3x^2 - 3xy + 6x + \frac{3}{2}y^2$, w prostokącie o wierzchołkach $A = (-1,0)$, $B = (\frac{3}{2},0)$, $C = (\frac{3}{2},2)$, $D = (-1,2)$,

   (d) $f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$ dla $x \in [0,\pi]$, $y \in [0,\pi]$, $z \in [0,\pi]$.

3. Znajdź wszystkie lokalne ekstrema funkcji $f(x,y) = 2 - 3x^2 + y^2 - 3\ln(1 + x^2 + y^2)$ oraz scharakteryzuj je. Następnie wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f w obszarze $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Wskazówka: $\ln 2 \simeq 0.7$.

4. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji określonych wzorami:

   (a) $f(x,y) = xy^2$, jeżeli $x + y = 1$,

   (b) $g(x,y) = xy$, jeżeli $x^2 + y^2 = 8$,

   (c) $f(x,y,z) = xy^3z^3$, jeżeli $x + 2y + 3z = a$, x, y, z, a są dodatnie,

   (d) $g(x,y,z) = x - 2y + 2z$, jeżeli $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

5. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji określonych wzorami:

   (a) $f(x,y,z) = xyz$, jeżeli $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$,
   (b) $g(x,y,z) = z$, jeżeli $x^2+y^2=5$, $2x+y+z=6$,
   (c) $h(x,y,z) = 2x+3y-2z$, jeżeli $x^2+y^2+z^2-14=0$, $x+y+z=0$.

6. $g(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_9x_{10} = \sum_{i,j=1,\ i<j}^{10} x_ix_j$ na zbiorze zwartym $\{(x_1, \ldots x_{10}) \in \mathbb{R}^{10} \ : \ x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 10, x_1 \geq 0, \ldots, x_{10} \geq 0\}$.

7. Znaleźć najmniejszą oraz największą wartość funkcji $f(x,y,z) = xyz$ na zbiorze

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=5, x^2+y^2+z^2 \leq 9\}.$$