

Fizyka Techniczna, Matematyka II, Zestaw 1  
Całka niewłaściwa

1. Policzyc następujące całki niewłaściwe:

(a)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx,$

(b)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$

(c)  $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx,$

(d)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 16} dx,$

(e)  $\int_0^{\infty} x \sin x dx,$

(f)  $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx,$

(g)  $\int_0^1 x \ln x dx,$

(h)  $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}},$

(i)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}},$

(j)  $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+1)^{4/3}} dx,$

(k)  $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}} dx,$

(l)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(x+1)} dx,$

(m)  $\int_1^{\infty} x^2 e^{-x} dx,$

(n)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx,$

(o)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)^2}.$

(p)  $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, a < b.$

2. Obliczyć pole figury zawartej między wykresem funkcji  $y = \frac{2x^4 + 4x^2 + x + 1}{x^4 + 2x^2 + 1}$  a jej asymptotą.

3. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi  $y = 0$  i  $y = \frac{x}{x^4 + 1}$ .

4. Rozważmy nieskończoną trąbkę wyznaczoną poprzez obrót dookoła osi  $Ox$  krzywej  $y = \frac{1}{x}$  dla  $x \geq 1$ . Pokazać, że taka trąbka ma skończoną objętość lecz nieskończoną powierzchnię.

5. Zbadaj zbieżność następujących całek

(a)  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx,$

(b)  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx,$

(c)  $\int_0^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{x^{4/3}} \right) dx,$

(d)  $\int_0^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{x^{5/4}} \right) dx,$

(e)  $\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-1/x}}{\sqrt{x}} dx,$

(f)  $\int_0^{\infty} x^x e^{-x^2} dx,$

(g)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx,$

(h)  $\int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3 \ln(1 + \sqrt{x})} dx.$