

Fizyka Techniczna, Matematyka II, Zestaw 3

Równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu

1. Podaj jakiego typu są następujące równania różniczkowe:

(a) $y' \ln x = \sqrt{y}$,

(b) $(x + 2y) + xy' = 0$,

(c) $2y'' + 3y' - 4y = x^2 \ln x$,

(d) $y' = e^{x-y}$,

(e) $y' = \frac{y^2 + xy}{x^2}$,

(f) $y' + y \sin x = \cos x$,

(g) $(1 + y^2)y'' = 2y(y')^2$,

(h) $y' + \sqrt{xy} + 1 = 0$.

2. Rozwiąż równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych:

(a) $x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3y$,

(b) $y' = \frac{y \ln y}{\sin x}$,

(c) $y' = \frac{e^x y}{e^{2x}}$,

(d) $y(x + 1) + x(1 - y)y' = 0$,

(e) $y^2(1 + x)y + x^2(1 - y)y' = 0$,

(f) $(1 + x + y + xy)y' = 1$.

3. Rozwiąż następujące równania różniczkowe jednorodne:

(a) $2xy \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, $y(1) = 2$,

(b) $8y + 10x + (5y + 7x) \frac{dy}{dx} = 0$,

(c) $(x^2 - y^2) \frac{dy}{dx} - 2xy = 0$, jeżeli $y(2) = 4$,

(d) $xy' = y \left(\ln \frac{y}{x} + 1 \right)$, jeżeli $y(1) = e$,

(e) $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$,

(f) $(x + y) \frac{dy}{dx} + x - y = 0$.

4. Rozwiąż równanie różniczkowe liniowe metodą uzmienniania stałej oraz metodą czynnika całkującego:

(a) $y' + 2y = xe^{-x} + 2$,

(b) $y' \sin x - y = 1$, $y \left(\frac{5\pi}{2} \right) = 0$,

(c) $2x \frac{dy}{dx} - y = \frac{3}{2}x^2$, z warunkiem $y(1) = 5$,

(d) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{(1 + x^2) \operatorname{arctg} x} + \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \operatorname{arctg} x$,

(e) $\frac{dy}{dx} + \frac{py}{1 + x^2} = \frac{q}{1 + x^2}$, (rozważ wszystkie możliwe wartości parametrów p i q),

(f) $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$, wskazówka: rozważyc funkcję $x = x(y)$.

5. Rozwiąż następujące równania różniczkowe:

(a) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{\cos x}{x^2}$,

(b) $x^2 y' + y^2 = 0$, $y(1) = 1$

(c) $xy' = y + xe^{y/x}$, $y(1) = 0$,

(d) $y' \sin x + y \cos x = \sin 2x$.