Fizyka Techniczna, Matematyka II, Zestaw 5
Funkcje wielu zmiennych, pochodna cząstkowa

1. Narysuj w układzie współrzędnych dziedzinę naturalną funkcji:

   (a) $f(x,y) = \ln(1 - x^2 - y) + \dfrac{x}{\sqrt{y-x}}$,

   (b) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x-y}{x+y} + \arcsin \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

   Jakie cechy (domknięty, otwarty, ograniczony, nieograniczony, spójny, jednospójny) mają te zbiory?

2. Policzyć granice iterowane następujących funkcji:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$,

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x-y}{x+y}$,

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y}$,

   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} \dfrac{x-2y}{x^2+y}$.

   Jakie wnioski możemy wyciągnąć z tych obliczeń?

3. Obliczyć granice funkcji $f(x,y)$ gdy $(x,y) \to (0,0)$ wzdłuż linii $y = mx$

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$,

   (b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$,

   (c) $f(x,y) = \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$.

   Dla jakich wartości m granice te odpowiadają granicom iterowanym?

4. Obliczyć granice funkcji:

   (a) $f(x,y) = 3x^2 - y^2$ gdy $(x,y) \to (1,1)$,

   (b) $f(x,y) = x + 2y$ gdy $(x,y) \to (1,2)$,

   (c) $f(x,y) = x^2 \sin \frac{y}{x}$ gdy $(x,y) \to (2,\pi)$,

   (d) $f(x,y) = e^{-1/xy}$ gdy $(x,y) \to (0,0)$,

   (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

5. Niech $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ dla $(x,y) \neq (0,0)$. Pokazać, że granice iterowane istnieją i są równe 0, ale nie istnieje granica $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

6. Wykorzystując współrzędne biegunowe obliczyć granicę

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}.$$

7. Sprawdzić, które funkcje są ciągłe:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

8. Udowodnij, że funkcja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$ nie jest ciągła.

9. Policzyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial}{\partial y}$ następujących funkcji:

   (a) $f(x,y) = 3x^2 - y^2$,
   (b) $f(x,y) = 2x^3 + 6xy + y^2$,
   (c) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$,
   (d) $f(x,y) = x^2 \sin \frac{y}{x}$,
   (e) $f(x,y) = e^x \cos xy$,
   (f) $f(x,y) = e^{-1/xy}$,
   (g) $f(x,y) = x^y$,
   (h) $f(x,y) = x\sqrt{y} - e^x \ln y$.

10. Obliczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ oraz $\frac{\partial}{\partial z}$ następującyh funkcji:

    (a) $f(x,y,z) = 2x^3 + 4xyz + z^2$,
    (b) $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$,
    (c) $f(x,y,z) = e^x \cos xy + e^y \sin yz$,
    (d) $f(x,y,z) = x^{yz}$.

11. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu z funkcji

    (a) $f(x,y) = \sin^2(2x+y)$,
    (b) $f(x,y,z) = x^2 - y^2z + 3xyz^3$.

12. Pokazać, że funkcja $f(x,y,z) = \dfrac{x-y}{y-z}$ jest rozwiązaniem równania $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$.

13. Pokazać, że funkcja $u(x,y,z) = \ln \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ jest rozwiązaniem równania $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

14. Pokazać, że $V(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ jest rozwiązaniem równania $\Delta V = 0$ wszędzie poza $(0,0,0)$. Zatem $V = 1/r$ jest potencjałem z dokładnością co do stałej. "Potencjał elektryczny wytworzony przez punktowy ładunek q, w odległości r od ładunku (w stosunku do potencjału w nieskończoności), można wykazać, że dany jest wzorem $\varphi_{\mathbf{E}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r}$."

15. Wyznaczyć Δf, gdzie $f(x,y,z) = (\cos ax)(\cos by)(\cos cz)$.

16. Wykazać, że dla równania Clapeyrona $pv = RT$ iloczyn pochodnych cząstkowych $\partial p/\partial v$, $\partial v/\partial T$ oraz $\partial T/\partial p$ wynosi -1.

17. Dane jest równanie Van der Waalsa $P = \dfrac{RT}{V-b} - \dfrac{a}{V^2}$ (R, a, b są stałymi). Wyznaczyć $\partial P/\partial T$ i $\partial P/\partial V$.