

# Fizyka Techniczna, Matematyka II, Zestaw 7

## Styczne do krzywych i powierzchni

1. Znajdź równanie normalnej do krzywej  $x^2 - 10x + y^2 - 4y + 4 = 0$  w punkcie  $A = (8, 6)$  i wykaż, że przechodzi ona przez punkt  $(5, 2)$ .
2. Pod jakim kątem parabola  $y^2 = x$  przecina liść Kartezjusza o równaniu  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ ?
3. Wyznacz równanie prostych stycznych do krzywych:
  - (a)  $x = e^t, y = e^{-t}, z = t^2$  przy  $t = 1$ ,
  - (b)  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$  przy  $t = 0$ .
4. Za pomocą gradientów wyznacz kąt pomiędzy dwiema rodzinami krzywych danymi odpowiednio wzorami  $xy = c_1$  i  $x^2 - y^2 = c_2$ . Przy pomocy programu komputerowego narysuj rodziny tych krzywych.
5. Napisz równania prostej stycznej i płaszczyzny normalnej do krzywej danej równaniami  $x^2 = 8z, y^2 = 2z$  w punkcie  $(4, -2, ?)$ .
6. Napisz równanie płaszczyzny normalnej do krzywej śrubowej o równaniu  $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 4t$  w punkcie  $P$  dla  $t = 0$ .
7. Wyznacz normalny wektor jednostkowy do elipsoidy  $2x^2 + y^2 + z^2 = 4$  w punkcie  $(1, 1, 1)$  oraz wyznacz równanie płaszczyzny stycznej.
8. Wyznacz równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni  $xyz = 1$  w punkcie  $(-1, 1, -1)$ .
9. Wyznacz równanie płaszczyzny stycznej do sfery  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  w punkcie  $(\sqrt{\frac{a}{3}}, \sqrt{\frac{a}{3}}, \sqrt{\frac{a}{3}})$ .
10. Wyznacz kąt, pod jakim prosta  $\mathbf{r}(t) = (t, t, t)$  przecina powierzchnię (jaką?)  $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$  dla  $x > 0, y > 0, z > 0$ .
11. Wyznacz kąt, pod jakim prosta  $\mathbf{r}(t) = (t, 2t, t)$  przecina powierzchnię (jaką?)  $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$  dla  $x > 0, y > 0, z < 0$ . Wyznacz również płaszczyznę styczną w punkcie przecięcia.
12. Znajdź wektor normalny oraz płaszczyznę styczną do powierzchni (jakiej?)  $\mathbf{r}(u, v) = (2u \cos v, 1 - u^2, 3u \sin v)$  w punkcie  $(0, 0, 3)$ .
13. Znajdź wektor normalny oraz płaszczyznę styczną do powierzchni (jakiej?)  $\mathbf{r}(u, v) = (u \sin v, u \cos v, 2u)$  w punkcie  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$ .