

Kolokwium 1

Matematyka 2

10 kwietnia 2024

Zadanie 1 (8p+6p). Wiedząc, że $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, oblicz następujące całki lub pokaż, że są one rozbieżne:

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{1+x+x^2}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx,$$

$$(b) \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx.$$

Zadanie 2 (7p+7p). Rozwiąż równania różniczkowe:

$$(a) xy' = y - \sqrt{x^2 - y^2},$$

$$(b) y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, y(0) = 2.$$

Zadanie 3 (12p). Oblicz, o ile istnieje, następującą granicę:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + 3xy^2}{x^3 + y^3}.$$

Zadanie 4 (10p). Wyznacz ekstrema funkcji uwikłanej zadanej równaniem:

$$y^2 + 2xy = 2x - 4x^2.$$