

Kolokwium 1

Matematyka 2

11 kwietnia 2025

Zadanie 1 (6p+8p). Oblicz następujące całki niewłaściwe lub pokaż, że są one rozbieżne:

(a) $\int_0^{\infty} x^9 e^{-x^2} dx.$

(b) $\int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}} dx.$

Zadanie 2 (7p+7p). Rozwiąż równania różniczkowe:

(a) $xy' = y + xe^{y/x}, y(1) = 0,$

(b) $x^2 y' - y = x^2 e^{x-1/x}, y(1) = 2.$

Zadanie 3 (10p). Znajdź rozwiązanie problemu początkowego:

$$\begin{cases} y'' + 2y + y &= 4e^{-x} \\ y(0) &= 3 \\ y'(0) &= -1 \end{cases}$$

Zadanie 4 (12p). Zbadaj ciągłość funkcji:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + 3y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$