

Kolokwium 2

Matematyka 2

14 czerwca 2022

Zadanie 1 (14p). Oblicz całkę:

$$\iiint_V (2z - 3x^2 - 3y^2) \, dx \, dy \, dz,$$

gdzie V jest bryłą ograniczoną przez powierzchnie $z = 2(x^2 + y^2)$ oraz $z = x^2 + y^2 + 1$.

Zadanie 2 (11p). Oblicz pracę, jaką wykona punkt materialny (o masie jednostkowej) w polu wektorowym $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$, poruszając się wzdłuż łuku $K: x(t) = t, y(t) = t^2, z(t) = t^3$ od punktu $A = (0, 0, 0)$ do $B = (1, 1, 1)$.

Zadanie 3 (13p). Niech $\vec{F} = (P, Q)$ będzie polem wektorowym, gdzie $P(x, y) = \sin x \cos y$ oraz $Q(x, y) = xy + \cos x \sin y$. Zbadaj, czy \vec{F} jest polem potencjalnym. Wykorzystując twierdzenie Greena, oblicz:

$$\int_K P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy,$$

jeżeli K jest łamaną $ABCD$ (w takiej właśnie kolejności), gdzie $A = (0, 0), B = (1, -1), C = (1, 1), D = (0, 2)$.

Zadanie 4 (12p). Obliczyć masę części płaszczyzny $x + y + z = 1, x, y, z \geq 0$, jeżeli jej gęstość powierzchniowa to $f(x, y, z) = xyz$.