

Zestaw 1

Jakub Kwaśny

Zadanie 1. Ile jest:

- (a) możliwych tablic rejestracyjnych złożonych z dwóch liter alfabetu łacińskiego (26 znaków), a następnie pięciu znaków - liter lub cyfr?
- (b) wszystkich relacji dwuargumentowych w zbiorze n -elementowym?
- (c) liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 3 lub 5?
- (d) k -wyrazowych ciągów rosnących o wyrazach należących do $[n]$?

Zadanie 2. Udowodnij, że liczba wszystkich k -elementowych kombinacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego X wynosi $\binom{n+k-1}{k}$.

Zadanie 3. Ile jest:

- (a) możliwych wyników rzutu pięcioma identycznymi kostkami sześciennymi?
- (b) k -wyrazowych ciągów niemalejących o wyrazach należących do $[n]$?
- (c) liczb naturalnych mniejszych niż 2^n , które w zapisie binarnym mają dokładnie k jedynek?
- (d) liczb naturalnych mniejszych lub równych 2^n , które w zapisie binarnym mają dokładnie k jedynek?
- (e) liczb naturalnych mniejszych od 100 000, dla których suma cyfr (w zapisie dziesiętnym) jest równa 8?

Zadanie 4. Ile jest rozwiązań równania:

- (a) $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 14$, gdzie $x_1, \dots, x_7 \in \mathbb{N}$,
- (b) $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 14$, gdzie $x_1, \dots, x_7 \in \mathbb{N}_+$,
- (c) $x_1 + x_2 + x_3 = 17$, gdzie $x_1, x_3 \geq 3$, $x_2 \geq 1$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$,
- (d) $x_1 + x_2 + x_3 = 17$, gdzie $x_1, x_3 \geq 3$, $1 \leq x_2 \leq 5$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$,
- (e) $x_1 + x_2 + x_3 = 21$, gdzie $x_1, x_2, x_3 \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Zadanie 5. Ile jest różnych permutacji:

- (a) liter słowa MATEMATYKA?
- (b) liter słowa KRAWĘDŹ, które zawierają słowo KRA?
- (c) liter N,U,F,S,I,H,T,A,M, które nie zawierają żadnego ze słów MATH, IS, FUN?

Zadanie 6. Niech X, Y będą zbiorami skończonymi o liczebnościach $|X| = n$, $|Y| = m$. Ile jest:

- (a) funkcji z X do Y ?
- (b) iniekcji z X do Y ?
- (c) bijekcji z X do Y ?

Zadanie 7. Niech $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Ile jest:

- (a) wszystkich grafów (etykietowanych) o zbiorze wierzchołków V ?
- (b) wszystkich grafów (etykietowanych) o zbiorze wierzchołków V i dokładnie m krawędziach?
- (c) wszystkich drzew (etykietowanych) o zbiorze wierzchołków V ?
- (d) wszystkich digrafów (etykietowanych) o zbiorze wierzchołków V ?
- (e) wszystkich orientacji grafów (etykietowanych) o zbiorze wierzchołków V ?
- (f) wszystkich orientacji grafów (etykietowanych) o zbiorze wierzchołków V i dokładnie m krawędziach?

Zadanie 8. Wykorzystując dowody kombinatoryczne, udowodnij następujące równości:

$$(a) \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$(e) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$(b) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$(f) \quad \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}^2 = n^2 \binom{2n-2}{n-1}$$

$$(c) \quad \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

$$(g) \quad \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = 3^n$$

$$(d) \quad \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}$$

$$(h) \quad \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} = \binom{m+n+1}{n+1}$$