

Zestaw 2

Jakub Kwaśny

Zadanie 1. W modelu $\mathcal{G}(n, p)$ oblicz:

- (a) $\mathbb{P}(G_{n,p} \cong K_{k,n-k})$, dla ustalonego $k \in [n-1]$,
- (b) $\mathbb{P}(G_{n,p} \text{ jest drzewem})$,
- (c) $\mathbb{P}(d_{G_{n,p}}(u, v) = 2)$, dla ustalonych $u, v \in V$.

Zadanie 2. W modelu $\mathcal{G}(n, p)$ oblicz:

- (a) $\mathbb{E}X_k$, gdzie X_k – liczba ścieżek długości k w $G_{n,p}$,
- (b) $\mathbb{E}Y_k$, gdzie Y_k – liczba drzew rzędu k w $G_{n,p}$,
- (c) $\mathbb{E}Z$, gdzie Z – liczba skojarzeń pełnych w $G_{n,p}$.

Zadanie 3. Udowodnij, że jeżeli $0 < p < 1$ oraz:

$$\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{t} (1-p)^{\binom{t}{2}} < 1,$$

to $R(k, t) > n$.

Zadanie 4. Niech H będzie n -jednolitym hipergrafem ($n \geq 2$) o mniej niż 2^{n-1} krawędziach. Wykaż, że istnieje takie 2-kolorowanie wierzchołków tego hipergrafu, że każda krawędź zawiera wierzchołki w obu kolorach.

Zadanie 5. Turniej $T_n = (V, A)$ ma własność S_k , $k \in [n]$, jeżeli

$$\forall K \in \binom{V}{k} \quad \exists v \in V \setminus K \quad \forall u \in K: vu \in A.$$

Udowodnij, że jeśli $\binom{n}{k} (1 - 2^{-k})^{n-k} < 1$, to istnieje turniej T_n o własności S_k .

Zadanie 6. Niech F będzie rodziną skończonych ciągów binarnych taką, że żaden element F nie jest prefiksem żadnego innego. Udowodnij, że:

$$\sum_{i=1}^{\infty} N_i \frac{1}{2^i} \leq 1,$$

gdzie N_i oznacza liczbę elementów rodziny F długości i .

Zadanie 7. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ taką, że żaden element rodziny $\mathcal{F}$ nie jest podzbiorem żadnego innego. Udowodnij, że:

$$\sum_{k=0}^n \frac{N_k}{\binom{n}{k}} \leq 1,$$

gdzie N_k oznacza liczbę elementów rodziny $\mathcal{F}$ o liczebności k .

Zadanie 8. Zbiór $\{(A_i, B_i), 1 \leq i \leq h\}$ nazywamy (k, l) -systemem $(k, l \in \mathbb{N})$, jeżeli:

- $A_i \cap B_i = \emptyset$, $i \in [h]$,
- $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, $i, j \in [h]$, $i \neq j$,
- $|A_i| = k$, $|B_i| = l$, $i \in [h]$.

Wykaż, że $h \leq \binom{k+l}{k}$.

Zadanie 9. Niech $\{(A_i, B_i), 1 \leq i \leq h\}$ będzie rodziną par zbiorów liczb naturalnych, spełniającą:

- $A_i \cap B_i = \emptyset, i \in [h],$
- $(A_i \cap B_j) \cup (A_j \cap B_i) \neq \emptyset, i, j \in [h], i \neq j,$
- $|A_i| + |B_i| = n, i \in [h].$

Wykaż, że $h \leq 2^n$.

Zadanie 10. Każdy wyraz macierzy $A = \{a_{ij}\}$ wymiaru 100×100 jest liczbą naturalną ze zbioru $\{1, 2, \dots, 5000\}$. Wiadomo dodatkowo, że każda liczba z tego zbioru występuje w macierzy dokładnie dwa razy. Udowodnij, że można wybrać 100 wyrazów macierzy w taki sposób, aby:

- a) z każdego wiersza wybrany został dokładnie jeden element,
- b) z każdej kolumny wybrany został dokładnie jeden element,
- c) wybrane liczby były parami różne.

Zadanie 11. Niech $\phi = \bigwedge_{i=1}^m C_j$ będzie formułą logiczną w koniunkcyjnej postaci normalnej (CNF) i niech $|C_j| = k, j = 1, \dots, m$. Pokaż, że jeżeli $m < 2^k$, to ϕ jest spełnialna. Czy to ograniczenie na liczbę klauzul jest optymalne?