Zestaw 5

Jakub Kwaśny

Zadanie 1. Udowodnij, że dla dowolnego grafu H i liczby naturalnej $n \geqslant 1$, a.p.w. grafy zawierają r parami rozłącznych podgrafów izomorficznych z H.

Zadanie 2. Niech H_n, $n \geqslant 2$, będzie ciągiem grafów takim, że $|H_n| \leqslant \sqrt{\log_2 n}$. Udowodnij, że:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G_{n,\frac{1}{2}} \underset{\text{ind.}}{\supseteq} H_n) = 1.$$

Zadanie 3. Udowodnij, że $\mathcal{R}$ jest *jednorodny*, tj. izomorfizm między dowolnymi dwoma skończonymi indukowanymi podgrafami można rozszerzyć do automorfizmu całego grafu.

Zadanie 4. Udowodnij, że $\mathcal{R}$ zawiera dowolny skończony graf H jako podgraf indukowany.

Zadanie 5. Niech M będzie przeliczalnym modelem teorii mnogości. Definiujemy graf G o zbiorze wierzchołków M, gdzie dla dowolnych $x, y \in M$:

$$xy \in E(G) \iff x \in y \vee y \in x.$$

Udowodnij, że $G \cong \mathcal{R}$.

Zadanie 6. Niech $U, V \subset V(\mathcal{R})$ będą skończonymi i rozłącznymi zbiorami oraz:

$$Z = \{w \in V(\mathcal{R}) \colon \forall u \in U\ uw \in E(\mathcal{R}), \forall v \in V\ vw \notin E(\mathcal{R})\}$$

Udowodnij, że zbiór Z jest nieskończony, a graf indukowany przez Z jest izomorficzny z grafem Rada.

Zadanie 7. Udowodnij, że graf powstały przez zastosowanie dowolnej z poniższych operacji na grafie Rada jest izomorficzny z grafem Rada:

- usunięcie skończenie wielu wierzchołków,
- usunięcie skończenie wielu krawędzi,
- dodanie skończenie wielu krawędzi.

Zadanie 8. Niech $V_1 \cup V_2 = V(\mathcal{R})$ będzie podziałem zbioru wierzchołków grafu Rada na dwa rozłączne podzbiory. Udowodnij, że co najmniej jeden z tych podzbiorów indukuje podgraf izomorficzny z $\mathcal{R}$.

Zadanie 9. Udowodnij, że poza grafem Rada istnieją tylko dwa inne nieskończone, przeliczalne grafy spełniające własność z poprzedniego zadania.

Zadanie 10. Czy asymptotycznie prawie wszystkie grafy:

(a) mają podgraf indukowany H (dla pewnego, z góry ustalonego H)?

(b) są k-regularne (dla pewnego, z góry ustalonego $k \in \mathbb{N}$)?

(c) są planarne?

(d) mają talię k (dla pewnego, z góry ustalonego $k \in \mathbb{N}$)?

(e) są spójne?

(f) mają liczbę chromatyczną równą co najwyżej k (dla pewnego, z góry ustalonego $k \in \mathbb{N}$)?

(g) są samodopełniające się?