# Zestaw 6

Jakub Kwaśny

W poniższych zadaniach zwrot „prawie na pewno zachodzi własność $\mathcal{P}$" należy rozumieć jako równoważny z: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G_{n,p} \in \mathcal{P}) = 1$.

**Zadanie 1.** Udowodnij lub wskaż kontrprzykład: jeżeli $\mathbb{E}(X_n) \to \infty$, to $\mathbb{P}(X_n = 0) \to 0$.

**Zadanie 2.** Udowodnij, że jeśli $p \ll n^{-3/2}$, to prawie na pewno $G_{n,p}$ składa się z izolowanych wierzchołków i izolowanych krawędzi. Udowodnij, że dla $p \gg n^{-3/2}$ prawie na pewno tak nie jest.

**Zadanie 3.** Niech $p = c\frac{\ln n}{n}$, $c < 1$, $X_0$ - liczba wierzchołków izolowanych. Udowodnij, że:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_0 > 0) = 1.$$

**Zadanie 4.** Niech $p = \frac{c}{n}$, oraz $X_d$ - liczba wierzchołków stopnia $d$ ($c$ i $d$ są stałe). Udowodnij, że:

$$X_d \approx \frac{c^d e^{-c}}{d!} n.$$

**Zadanie 5.** Niech $p = \frac{c}{n}$, gdzie $c < 1$. Niech $H$ będzie składową spójną $G_{n,p}$.

a) Uzasadnij, że jeśli $H$ zawiera dwa cykle, to $H$ zawiera podgraf powstały przez dodanie do ścieżki dwóch dodatkowych krawędzi łączących jej wierzchołki. Ogranicz liczbę możliwych tego typu struktur na $k$ wierzchołkach.

b) Dla $X$ - liczby takich struktur w $G_{n,p}$ udowodnij, że $\mathbb{E}X \to 0$. Wyciągnij wniosek na temat składowych zawierających więcej niż jeden cykl w $G_{n,p}$.

c) Niech $Y_k$ - liczba wierzchołków w składowych rzędu $k$ z jednym cyklem. Udowodnij, że:

$$\mathbb{E}Y_k \leqslant Ak(ce^{1-c})^k,$$

gdzie $A$ - pewna stała, wykorzystując następujące oszacowanie:

$$\binom{n}{k} \leqslant \frac{n^k}{k!} e^{-k(k-1)/(2n)}$$

d) Wywnioskuj, że liczba $Y$ wierzchołków we wszystkich składowych z jednym cyklem ma wartość oczekiwaną $O(1)$. Wykorzystując nierówność Markowa pokaż, że dla dowolnej funkcji $\omega(n) \to \infty$, prawdopodobieństwo, że $Y \geqslant \omega$, zmierza do zera.

e) Jak zatem wygląda $G_{n,p}$ gdy $p = \frac{c}{n}$ oraz $c < 1$?

**Zadanie 6.** Niech $H$ - ustalony graf o gęstości $\varepsilon(H) > 0$, oraz $p \ll n^{-1/\varepsilon(H)}$. Udowodnij, że:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G_{n,p} \supseteq H) = 0.$$

**Zadanie 7.** W modelu $\mathcal{G}(n, \frac{c}{n})$, zbadaj do czego zmierza wartość oczekiwana liczby cykli Hamiltona, przy $n \to \infty$, w zależności od wartości stałego parametru $c$. Wykorzystaj wzór Stirlinga. Czy istnieje taka stała $c_0$, że funkcją progową dla hamiltonowskości jest $\frac{c_0}{n}$?

**Zadanie 8.** Zbadaj, czy poniższe grafy są wyważone: $K_k$, drzewa, cykle, grafy regularne, sumy rozłączne grafów regularnych.

**Zadanie 9.** Niech $H$ będzie grafem powstałym z $K_4$ poprzez dodanie do jednego z wierzchołków wiszącej krawędzi. Definiujemy $X$ jako zmienną losowa w przestrzeni $\mathcal{G}(n,p)$, gdzie $p = n^{-7/10}$ która jest równa liczbie (niekoniecznie indukowanych) kopii $H$ w grafie $G_{n,p}$.

(a) Udowodnij, że $\mathbb{E}X \to \infty$.

(b) Udowodnij, że $\mathbb{P}(X > 0) \to 0$.