Kolokwium 1

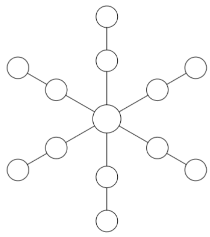
Metody probabilistyczne matematyki dyskretnej

8 grudnia 2022

Zadanie 1 (6p+5p)**.** Wykorzystując dowody kombinatoryczne, udowodnij następujące równości:

(a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} 3\binom{n}{k}\binom{k}{3} = n\binom{n-1}{2}\cdot 2^{n-3}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=4}^{n}\binom{k-1}{3} = \binom{n}{4}$

Zadanie 2 (12p)**.** Na ile sposobów można pokolorować koła płatka śniegu (rys. poniżej) dwoma kolorami tak, aby dokładnie 4 koła były w kolorze malinowym, a dokładnie 9 kół w kolorze poziomkowym? Kolorowania uznajemy za identyczne jeśli jedno powstaje z drugiego przez obrót lub symetrię płatka śniegu.



Zadanie 3 (14p)**.** Niech $\mathcal{G}$ będzie rodziną grafów etykietowanych rzędu co najwyżej n taką, że żaden graf z $\mathcal{G}$ nie jest podgrafem (etykietowanym) żadnego innego grafu z $\mathcal{G}$. Udowodnij, że:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{N_i}{2^{\binom{i}{2}}} \leqslant 1,$$

gdzie N_i oznacza liczbę grafów z $\mathcal{G}$ rzędu i.

Zadanie 4 (13p)**.** Niech G będzie grafem rozmiaru $||G|| = m$. Wykaż, że istnieje takie 4-kolorowanie wierzchołków tego grafu, że ponad $\frac{3}{4}m$ krawędzi łączy wierzchołki o różnych kolorach.