

Kolokwium 1

Metody probabilistyczne matematyki dyskretnej

30 listopada 2023

Zadanie 1 (6p+5p).

- (a) Na ile sposobów można rozdać 30 identycznych długopisów trzem osobom tak, aby każda dostała co najmniej 3, ale nie więcej niż 13 długopisów?
- (b) Ile jest różnych permutacji słowa KOŁOKWIUM, które nie zawierają słowa MOL?

Zadanie 2 (12p). Na ile sposobów można pokolorować wierzchołki czworościanu foremego czterema kolorami tak, aby dokładnie jeden wierzchołek był w kolorze malachitowym?

Zadanie 3 (13p). Podwójną liczbą Ramseya $R_{r,2}(k)$ nazywamy najmniejszą liczebność grafu pełnego taką, że jeżeli przypiszemy każdej krawędzi tego grafu parę $\{c_1, c_2\} \subseteq \{1, \dots, r\}$ różnych kolorów, to zawsze znajdziemy monochromatyczną klikę rzędu k (jeśli niejasne, dopytaj). Udowodnij, że jeśli:

$$\binom{n}{k} 2^{\binom{k}{2}} < r^{\binom{k}{2}-1},$$

to $R_{r,2}(k) > n$.

Zadanie 4 (14p). Wykaż, że istnieje takie 4-kolorowanie krawędzi grafu pełnego K_{16} , które zawiera co najwyżej 35 monochromatycznych trójkątów. Czy istnieje również takie, które zawiera co najwyżej 34 monochromatyczne trójkąty?