

Kolokwium 1

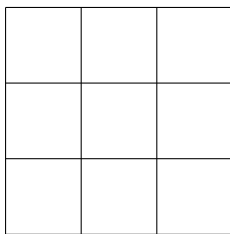
Metody probabilistyczne matematyki dyskretnej

28 listopada 2024

Zadanie 1 (6p+5p). Wykorzystując dowody kombinatoryczne, udowodnij następujące równości:

$$(a) \sum_{k=3}^n 3 \binom{n}{k} \binom{k}{3} = n \binom{n-1}{2} \cdot 2^{n-3} \qquad (b) \sum_{k=4}^n \binom{k-1}{3} = \binom{n}{4}$$

Zadanie 2 (12p). Na każdym polu planszy 3×3 (rysunek poniżej) kładziemy pionek w jednym z pięciu kolorów. Na ile sposobów możemy to zrobić tak, aby użyć dokładnie czterech pionków w kolorze grynszpanowym? Plansza leży na stole, na którym możemy ją dowolnie obracać.



Zadanie 3 (13p). Niech H będzie n -jednolitym hipergrafem ($n \geq 2$) o co najwyżej $k^{n-1}/2^n$ krawędziach. Wykaż, że istnieje takie kolorowanie wierzchołków tego hipergrafu kolorami $\{1, 2, \dots, k\}$ ($k \geq 3$), że każda krawędź zawiera dwa wierzchołki, których kolory różnią się o co najmniej 2.

Zadanie 4 (14p). Udowodnij, że da się tak zorientować krawędzie grafu pełnego dwudzielnego $K_{n,n}$, aby otrzymany digraf miał co najmniej $(n!)^2 4^{1-n}$ ścieżek Hamiltona.